14. 操作发现:【解】(1)∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,∴ $\angle BOC=90°$. 当一条直角边与对角线重合时,重叠部分的面积为 $S_{\triangle BOC}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}=\frac{1}{4}\times4\times4=4$.

当一条直角边与正方形的一边垂直时,设两条直角边分别交正方形两边于 Q,P 两点,如图(1),

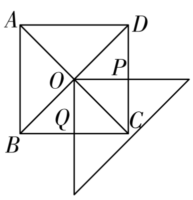
∴ $\angle OPC=\angle POQ=\angle PCQ=90°$,∴ 四边形 $POQC$ 是矩形.

∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,∴ $\angle ACD=45°$,

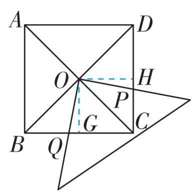
∴ $\angle POC=\angle PCO=45°$,∴ $OP=PC$,

∴ 四边形 $OPCQ$ 是正方形. 易得 $OP=\frac{1}{2}AD=2$,

∴ 四边形 $OPCQ$ 的面积是 4. 故答案为 4,4.



图(1)



图(2)

(2)如图(2),设两条直角边分别交正方形两边于 Q,P 两点,过点 O 作 $OG\perp CB$ 于点 G,$OH\perp DC$ 于点 H.

∵ O 是正方形 $ABCD$ 的中心,∴ 易得 $OG=OH$.

∵ $\angle OGC=\angle OHC=\angle HCG=90°$,

∴ 四边形 $OGCH$ 是矩形,∴ $\angle GOH=\angle QOP=90°$,

∴ $\angle QOG=\angle POH$.

∵ $OG=OH$,∴ 四边形 $OGCH$ 是正方形.

∵ $\angle OGQ=\angle OHP=90°$,

∴ $\triangle OGQ\cong\triangle OHP$(ASA),∴ $S_{\triangle OGQ}=S_{\triangle OHP}$,

∴ $S_{四边形OQCP}=S_{正方形OGCH}=\frac{1}{4}S_{正方形ABCD}$,

∴ $S_1=\frac{1}{4}S$. 故答案为 $S_1=\frac{1}{4}S$.

类比探究:

【证明】∵ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

∴ $AC\perp BD$,$OB=OC=OD=OA$,$\angle OBC=\angle OCD=45°$.

∵ $\angle FOE=\angle BOC$,∴ $\angle EOB=\angle FOC$,

∴ $\triangle EOB\cong\triangle FOC$(ASA),

∴ $BE=CF$,∴ $BE+DF=CF+DF=CD$.

∵ $CD=\sqrt{2}OC$,∴ $BE+DF=\sqrt{2}OC$.

拓展延伸:

【解】过点 O 作 $OG\perp AB$ 于点 G,$OH\perp BC$ 于点 H,如图(3).

同(2)可知四边形 $OGBH$ 是正方形,

∴ $BG=BH=OG=OH$.

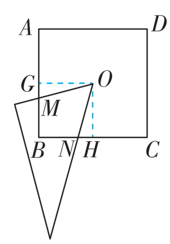
∵ $BM=BN$,∴ $GM=NH$.

∵ $\angle OGM=\angle OHN=90°$,

∴ $\triangle OGM\cong\triangle OHN$(SAS),

∴ $S_{\triangle OGM}=S_{\triangle OHN}$,$\angle GOM=\angle NOH$.

∵ $\angle MON=60°$,∴ $\angle GOM=\frac{1}{2}\times(90°-60°)=15°$.



图(3)

由(1)可知 $OG=2$,$S_{正方形OGBH}=4$,且 $\tan\angle GOM=\tan 15°=\frac{GM}{OG}=2-\sqrt{3}$,∴ $GM=2\times(2-\sqrt{3})=4-2\sqrt{3}$,∴ $S_{\triangle OGM}=\frac{1}{2}OG\cdot GM=\frac{1}{2}\times2\times(4-2\sqrt{3})=4-2\sqrt{3}$,∴ 重叠部分的面积为 $S_{四边形OMBN}=S_{正方形OGBH}-2S_{\triangle OGM}=4-2\times(4-2\sqrt{3})=4\sqrt{3}-4$.

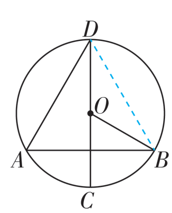
第六章　圆

A 2025 真题诊断练

刷 诊断

1. B 【解析】∵ $\angle AOB=100°$,∴ $\angle C=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2}\times100°=50°$. 故选 B.

2. C 【解析】如图,连接 BD. ∵ CD 是⊙O 的直径,AB 是弦,$AB\perp CD$,∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$,∴ $\angle ADC=\angle BDC=30°$,∴ $\angle BOC=2\angle BDC=60°$. 故选 C.

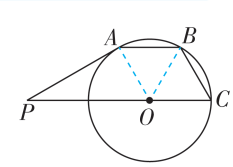


关键点拨

垂径定理

垂直于弦的直径平分弦,并且平分弦所对的两条弧.

3. C 【解析】连接 OA,OB,如图所示.



∵ PA 是⊙O 的切线,∴ $\angle OAP=90°$.

∵ $\angle P=30°$,∴ $\angle AOP=90°-30°=60°$. ∵ $AB/\!/PC$,∴ $\angle OAB=\angle AOP=60°$. ∵ $OA=OB$,∴ $\triangle AOB$ 是等边三角形,∴ $\angle AOB=60°$,∴ $\angle BOC=60°$. ∵ $OC=OB$,∴ $\triangle COB$ 是等边三角形,∴ $\angle BCP=60°$. 故选 C.

4. B　【解析】设该圆锥的底面圆的半径为 r cm，则 $2\pi r=\frac{90\pi\times40}{180}$，∴ $r=10$，故选 B.

5. B　【解析】∵ $AB=AC$，$\angle ACB=70°$，∴ $\angle ABC=\angle ACB=70°$，∴ $\angle BAC=180°-70°\times2=40°$，∴ $\angle BDC=\angle BAC=40°$. ∵ BD 为⊙O 的直径，∴ $\angle BCD=90°$，∴ $\angle CBD=90°-40°=50°$，故选 B.

6. 5　【解析】∵ 点 P 在⊙O 上，∴ 点 P 到圆心 O 的距离等于半径，为 5 cm，故答案为 5.

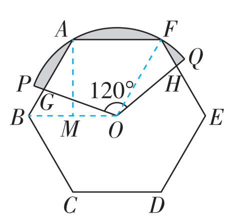
7. 43　【解析】∵ $\angle DOB=\angle FOB=23.5°$，∴ $\angle DOF=\angle DOB+\angle FOB=47°$. ∵ $GD/\!/HF$，∴ $\angle OFH=180°-\angle DOF=180°-47°=133°$. ∵ FI 是⊙O 的切线，∴ $OF\perp FI$，∴ $\angle OFI=90°$，∴ $\angle IFH=133°-90°=43°$，故答案为 43.

8. 40π　【解析】∵ 最高点离水面平台 MN 的距离为 128 m，圆心 O 到 MN 的距离为 68 m，∴ ⊙O 的半径为 $128-68=60$(m). ∵ 摩天轮匀速旋转一圈用时 30 min，该轿厢从点 A 出发，10 min 后到达点 B，∴ $\angle AOB=\frac{10}{30}\times360°=120°$，∴ 该轿厢所经过的路径长度为 $\frac{120\pi\times60}{180}=40\pi$(m). 故答案为 40π.

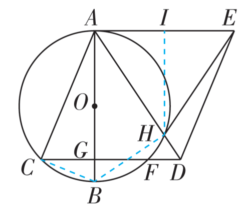
9. $\frac{16}{3}\pi-8\sqrt{3}$　【解析】如图，连接 OB，OF，过点 A 作 $AM\perp OB$ 于点 M. ∵ 正六边形 $ABCDEF$ 中，易得 $\angle BOF=120°=\angle GOH$，$OB=OF=AB=AF=4$，$\angle ABO=\angle EFO=60°$，∴ $\angle BOG=\angle FOH$，四边形 $OBAF$ 为菱形. 在 $\triangle OGB$ 与 $\triangle OHF$ 中，

$\begin{cases}\angle GBO=\angle HFO,\\ OB=OF,\\ \angle GOB=\angle HOF,\end{cases}$ ∴ $\triangle OGB\cong\triangle OHF$(ASA)，∴ $S_{\triangle OGB}=S_{\triangle OHF}$，

∴ $S_{菱形OBAF}=S_{五边形OGAFH}$. ∵ $\angle ABO=60°$，∴ $AM=AB\cdot\sin60°=2\sqrt{3}$，∴ $S_{菱形ABOF}=S_{五边形OGAFH}=2\sqrt{3}\times4=8\sqrt{3}$. ∵ $S_{扇形OPQ}=\frac{120}{360}\pi\times4^2=\frac{16}{3}\pi$，∴ $S_{阴影}=S_{扇形OPQ}-S_{五边形OGAFH}=\frac{16}{3}\pi-8\sqrt{3}$. 故答案为 $\frac{16}{3}\pi-8\sqrt{3}$.



10. 3　$\frac{13}{4}\sqrt{13}$　【解析】∵ $AB\perp CD$，$AG=12$，$GF=5$，∴ $CG=GF=5$，∴ $CF=2CG=10$，$AC=\sqrt{AG^2+CG^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$. ∵ 四边形 $ACDE$ 是菱形，∴ $CD=AC=AE=13$，∴ $GD=CD-GC=13-5=8$，$DF=CD-CF=13-10=3$，∴ $AD=\sqrt{AG^2+GD^2}=\sqrt{12^2+8^2}=4\sqrt{13}$. 如图，连接 BC，BH. ∵ AB 是⊙O 的直径，∴ $\angle ACB=90°$，$\angle AHB=90°$，∴ $\cos\angle CAB=\frac{AG}{AC}=\frac{AC}{AB}$，即 $\frac{12}{13}=\frac{13}{AB}$，∴ $AB=\frac{169}{12}$，∴ $\cos\angle DAB=\frac{AG}{AD}=\frac{AH}{AB}$，即 $\frac{12}{4\sqrt{13}}=\frac{AH}{\frac{169}{12}}$，∴ $AH=\frac{13}{4}\sqrt{13}$. 过 H 作 $HI\perp AE$ 于 I. ∵ 四边形 $ACDE$ 是菱形，∴ $CD/\!/AE$，∴ $\angle DAE=\angle GDA$，∴ $\sin\angle DAE=\sin\angle GDA$，$\cos\angle DAE=\cos\angle GDA$，∴ $\frac{IH}{AH}=\frac{AG}{AD}$，$\frac{AI}{AH}=\frac{GD}{AD}$，∴ $\frac{IH}{\frac{13}{4}\sqrt{13}}=\frac{12}{4\sqrt{13}}$，$\frac{AI}{\frac{13}{4}\sqrt{13}}=\frac{8}{4\sqrt{13}}$，

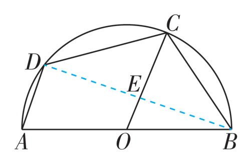


∴ $IH=\frac{39}{4}$，$AI=\frac{13}{2}$，∴ $IE=AE-AI=13-\frac{13}{2}=\frac{13}{2}$，∴ $EH=\sqrt{EI^2+IH^2}=\sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2+\left(\frac{39}{4}\right)^2}=\frac{13}{4}\sqrt{13}$，故答案为 3，$\frac{13}{4}\sqrt{13}$.

11. (1)【证明】∵ $\angle DAB+2\angle ABC=180°$，$\angle AOC=2\angle ABC$，

∴ $\angle DAB+\angle AOC=180°$，∴ $AD/\!/OC$.

(2)【解】如图，连接 BD 交 OC 于点 E.



由题意知，$\angle ADB=90°$，O 是 AB 的中点.

∵ $OC/\!/AD$，∴ $OC\perp BD$，

且 OE 是 $\triangle ABD$ 的中位线，∴ $OE=\frac{1}{2}AD=1$.

设半圆的半径为 r，则 $CE=r-1$.

由勾股定理知，$OB^2-OE^2=BE^2=BC^2-CE^2$，即 $r^2-1^2=(2\sqrt{3})^2-(r-1)^2$，解得 $r_1=3$，$r_2=-2$(舍去)，∴ $AB=2r=6$.

12. (1)【证明】∵ $AD\perp OB$，∴ $\angle DAC+\angle ACO=90°$.

∵ AC 是 $\angle BAD$ 的平分线，∴ $\angle DAC=\angle BAC$.

∵ $OA=OC$，∴ $\angle OAC=\angle OCA$，

∴ $\angle OAB=\angle OAC+\angle BAC=90°$，即 $OA\perp AB$.

∵ OA 为⊙O 的半径，∴ AB 为⊙O 的切线.

(2)【解】由(1)得 $\angle OAB=90°$. ∵ $\angle AOB=45°$，$OA=2$，

∴ $AB=OA=2$，∴ $OB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$.

∵ $OC=OA=2$，∴ $BC=OB-OC=2\sqrt{2}-2$.

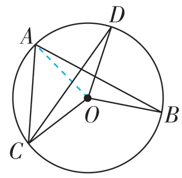
B 考点突破练

考点 28　圆的基本性质

刷基础

1. C　【解析】由题意可得 $\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}$，∴ $\angle AOD=\angle BOD=\frac{1}{2}\angle AOB$. ∵ $\angle AOB=100°$，∴ $\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOB=50°$，故选 C.

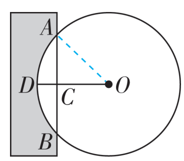
2. D 【解析】如图,连接 OA. $\because AB=CD$, $\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$, $\therefore \overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}-\overset{\frown}{AD}$, $\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$, $\therefore \angle AOC=\angle BOD=84°$. $\because OA=OC$, $\therefore \angle ACO=\angle CAO=\frac{1}{2}(180°-\angle AOC)=\frac{1}{2}\times(180°-84°)=48°$,故选 D.



3. B 【解析】$\because OE\perp AB$, $\therefore AE=EB=\frac{1}{2}AB=4$, $\therefore OA=\sqrt{AE^2+OE^2}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$. 故选 B.

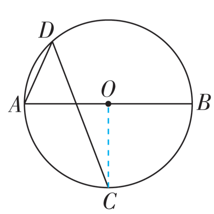
4. D 【解析】$\because AB$ 是$\odot O$ 的直径,$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AD}$,$\therefore AB$ 垂直平分 CD,$\therefore$ 由勾股定理得 $DE=\sqrt{OD^2-OE^2}=\sqrt{OD^2-(OD-AE)^2}=\sqrt{5^2-(5-2)^2}=4$(cm),$\therefore CD=2DE=8$ cm,故选 D.

5. 26 【解析】连接 OA,如图. $\because OD\perp AB$,垂足为 C,$\therefore AC=BC=\frac{1}{2}AB=5$ 寸. 设圆的半径为 x 寸,则 $OC=(x-1)$寸. 在 Rt$\triangle OAC$ 中,由勾股定理得 $5^2+(x-1)^2=x^2$,解得 $x=13$,$\therefore$ 圆材的直径长为 $2\times13=26$(寸). 故答案为 26.



6. C 【解析】$\because$ 点 B,C 分别在量角器 180,90 的刻度上,$\therefore \angle BOC=180°-90°=90°$,$\therefore \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=45°$. 故选 C.

7. B 【解析】如图,连接 OC. $\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$,$\therefore \angle AOC=\angle BOC$. $\because AB$ 为直径,$\therefore \angle AOC+\angle BOC=180°$,$\therefore \angle AOC=90°$,$\therefore \angle D=\frac{1}{2}\angle AOC=45°$. 故选 B.



8. 90 【解析】$\because AB$ 是圆的直径,$\therefore AB$ 所对的弧是半圆,所对圆心角的度数为 180°. $\because \angle1,\angle2,\angle3,\angle4$ 所对的弧所对的圆心角的和等于弧 AB 所对的圆心角,$\therefore \angle1+\angle2+\angle3+\angle4=\frac{1}{2}\times180°=90°$,故答案为 90.

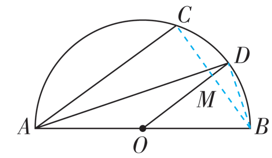
9. (1)【证明】$\because$ 点 D 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点,$\therefore \overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BD}$,

$\therefore \angle CAD=\angle BAD$,则$\angle CAB=2\angle BAD$.

又$\because \angle BOD=2\angle BAD$,

$\therefore \angle CAB=\angle BOD$,$\therefore AC/\!/OD$.

(2)【解】连接 BC,交 OD 于点 M,连接 BD,如图.



$\because AB$ 是半圆 O 的直径,$AB=10$,

$\therefore \angle ACB=\angle ADB=90°$,$OB=5$,

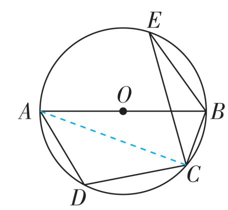
$\therefore$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中,$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$.

$\because$ 点 D 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点,$\therefore OD$ 垂直平分 BC,$\therefore BM=\frac{1}{2}BC=3$,

$\therefore$ 在 Rt$\triangle OBM$ 中,$OM=\sqrt{OB^2-BM^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$,$\therefore DM=5-4=1$.

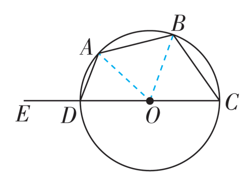
在 Rt$\triangle DBM$ 中,$BD^2=BM^2+DM^2=3^2+1^2=10$,$\therefore$ 在 Rt$\triangle ABD$ 中,$AD=\sqrt{AB^2-BD^2}=\sqrt{10^2-10}=3\sqrt{10}$.

10. B 【解析】如图,连接 AC. $\because AB$ 是$\odot O$ 的直径,$\therefore \angle ACB=90°$. $\because \angle BEC=20°$,$\therefore \angle CAB=\angle BEC=20°$,$\therefore \angle ABC=90°-\angle BAC=70°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是$\odot O$ 的内接四边形,$\therefore \angle ADC=180°-\angle ABC=110°$,故选 B.



11. A 【解析】$\because$ 四边形 $ABCD$ 是$\odot O$ 的内接四边形,$\therefore \angle D+\angle B=180°$. $\because \angle B=\alpha$,$\therefore \angle D=180°-\alpha$. 在 $\triangle ACD$ 中,$\angle CAD+\angle D+\angle ACD=180°$,$\angle CAD=\alpha-\beta$,$\therefore \alpha-\beta+180°-\alpha+\angle ACD=180°$,$\therefore \angle ACD=\beta$. 故选 A.

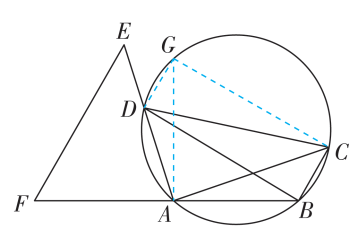
12. 125° 【解析】连接 OA,OB,如图所示. $\because \angle ADE=110°$,$\angle ADE+\angle ADO=180°$,$\therefore \angle ADO=70°$. $\because OA=OD$,$\therefore \angle OAD=\angle ODA=70°$,$\therefore \angle AOD=40°$,$\therefore \angle AOC=140°$. $\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$,$\therefore \angle AOB=\angle BOC=70°$. $\because OB=OC$,$\therefore \angle OCB=\angle OBC=55°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形,$\therefore \angle DAB+\angle OCB=180°$,$\therefore \angle DAB=125°$,故答案为 125°.



13. (1)【解】$\because CD$ 为直径,$\therefore \angle CAD=90°$. $\because \angle AFE=\angle ADC=60°$,$\therefore \angle ACD=90°-60°=30°$,$\therefore \angle ABD=\angle ACD=30°$.

(2)【证明】①$\because$ 四边形 $ABCD$ 是圆内接四边形,$\therefore \angle ABC+\angle ADC=180°$. $\because \angle AFE=\angle ADC$,$\therefore \angle ABC+\angle AFE=180°$,$\therefore EF/\!/BC$.

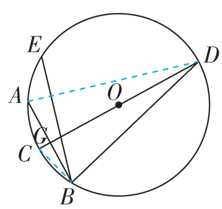
②如图,过点 D 作 $DG/\!/BC$ 交圆于点 G,连接 AG,CG.



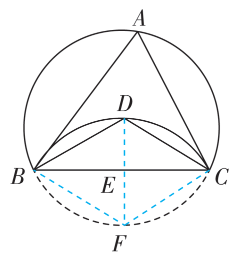
$\because DG/\!/BC$,$\therefore \angle GDC=\angle DCB$,$\therefore \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{CG}$,$\therefore BD=CG$. $\because$ 四边形 $ACGD$ 是圆内接四边形,$\therefore \angle GDA+\angle ACG=180°$.
又$\because \angle GDE+\angle GDA=180°$,$\therefore \angle GDE=\angle ACG$. $\because EF/\!/BC$,$DG/\!/BC$,$\therefore EF/\!/DG$,$\therefore \angle DEF=\angle GDE$,$\therefore \angle DEF=\angle ACG$.
$\because \angle AFE=\angle ADC$,$\angle ADC=\angle AGC$,$\therefore \angle AFE=\angle AGC$.
$\because AE=AC$,$\therefore \triangle AEF\cong\triangle ACG$(AAS),$\therefore EF=CG$,$\therefore EF=BD$.

刷 提升

1. C 【解析】如图,连接 AD,BC. $\because$ 直径 $CD\perp AB$,$\therefore \angle CDB=\angle ADC=15°=\angle ABC$. $\because A$ 为弧 CE 的中点,$\therefore \angle EBA=\angle ABC=15°$,$\therefore$ 在 Rt$\triangle DGB$ 中,$\angle EBD=180°-\angle DGB-\angle CDB-\angle ABE=180°-90°-15°-15°=60°$,故选 C.



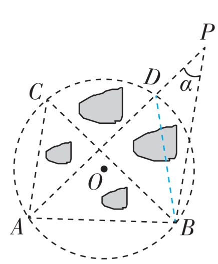
(第 1 题图)



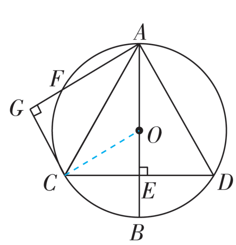
(第 2 题图)

2. A 【解析】如图,过点 D 作 $DF\perp BC$ 于点 E,交圆于点 F,连接 BF,CF. 由翻折的性质得 $DE=FE$,$\therefore BC$ 是线段 DF 的垂直平分线,$\therefore BD=BF$,$CD=CF$. 在 $\triangle BCD$ 和 $\triangle BCF$ 中,
$$\begin{cases}BD=BF,\\CD=CF,\\BC=BC,\end{cases}$$
$\therefore \triangle BCD\cong\triangle BCF$(SSS),$\therefore \angle BDC=\angle BFC$. $\because$ 四边形 $ABFC$ 是圆内接四边形,$\therefore \angle A+\angle BFC=180°$. $\because \angle A=65°$,$\therefore \angle BFC=180°-\angle A=115°$,$\therefore \angle BDC=\angle BFC=115°$. 故选 A.

3. 40(答案不唯一) 【解析】如图,设 $\odot O$ 与 AP 相交于点 D,连接 BD. $\because \angle ADB$ 是 $\triangle DBP$ 的一个外角,$\therefore \angle ADB>\alpha$. $\because \angle ADB=\angle ACB=55°$,$\therefore \alpha<55°$,$\therefore \alpha$ 的大小可能为 $40°$,故答案为 40(答案不唯一).



4. $\sqrt{3}$ 【解析】如图,连接 OC. 由题可得 $CE=DE$,$\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{DB}$,$\angle AEC=90°$,$\therefore AB$ 是 CD 的垂直平分线,$\angle CAE=\angle DAE$,$\therefore AC=AD$. $\because$ 点 E 是 OB 的中点,$\therefore OE=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}\times2=1$,$\therefore CE=\sqrt{OC^2-OE^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. 在 Rt$\triangle COE$ 中,$\cos\angle COE=\frac{OE}{OC}=\frac{1}{2}$,



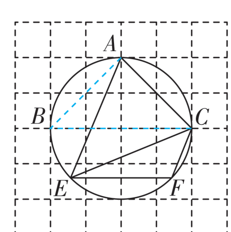
$\therefore \angle COE=60°$,$\therefore \angle CAE=\frac{1}{2}\angle COE=30°$,$\therefore \angle CAD=2\angle CAE=60°$,$\therefore \triangle ACD$ 是等边三角形,$\therefore \angle D=60°$. $\because CG\perp AF$,$\therefore \angle G=90°$. 由条件可知 $\overset{\frown}{CF}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$,$\therefore \angle CAG=\frac{1}{2}\angle D=30°$,$\therefore \angle CAG=\angle CAE$. 又$\because \angle G=\angle AEC=90°$,$AC=AC$,$\therefore \triangle AGC\cong\triangle AEC$(AAS),$\therefore CG=CE=\sqrt{3}$. 故答案为 $\sqrt{3}$.

5. (1)【证明】$\because$ 点 O,D 分别是 AB,BC 的中点,$\therefore OD$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线,$\therefore AC/\!/OD$,$\therefore \angle CAE=\angle ADO$. $\because \angle CAE=\angle CBE$,$\therefore \angle ADO=\angle CBE$.

(2)【解】$\because OB=OC$,点 D 为 BC 的中点,$\therefore OD$ 是 $\angle BOC$ 的平分线. $\because \angle BOC=120°$,$\therefore \angle COD=\frac{1}{2}\angle BOC=60°$. $\because OC=\frac{1}{2}AB=2$,$\therefore OD=OC\cdot\cos\angle COD=2\times\frac{1}{2}=1$,$CD=OC\cdot\sin\angle COD=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$,$\therefore AC=2OD=2$. $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径,$\therefore \angle ACB=90°$. 在 Rt$\triangle ACD$ 中,由勾股定理,得 $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{2^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{7}$. $\because AC/\!/OD$,$\therefore$ 易得 $\triangle ACG\backsim\triangle DOG$,$\therefore \frac{AG}{DG}=\frac{AC}{DO}$,即 $\frac{AG}{DG}=\frac{2}{1}=2$. 又$\because AD=AG+DG=\sqrt{7}$,$\therefore AG=\frac{2}{3}AD=\frac{2\sqrt{7}}{3}$.

刷 素养

6. C 【解析】如图,连接 AB,BC. 设每个小正方形的边长为 1. $\because AB=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,$AC=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$,$\therefore AB=AC$,$AB^2+AC^2=(2\sqrt{2})^2+(2\sqrt{2})^2=16$. $\because BC^2=4^2=16$,$\therefore AB^2+AC^2=BC^2$,$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形,且 $\angle BAC=90°$,$\therefore \angle ABC=45°$,$\therefore \angle AEC=\angle ABC=45°$. $\because$ 四边形 $AEFC$ 内接于圆,$\therefore \angle EAC=180°-\angle EFC=180°-112°=68°$,$\therefore \angle ACE=180°-\angle AEC-\angle EAC=180°-45°-68°=67°$. 故选 C.

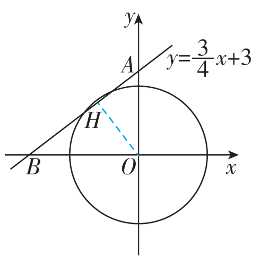


考点 29 与圆有关的位置关系

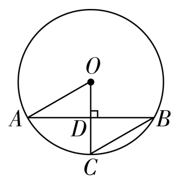
刷 基础

1. B 【解析】$\because$ 直线 l 与圆 O 相交,$\therefore$ 直线 l 与圆 O 有两个公共点. $\because$ 点 P 在直线 l 上,且 P 点到 O 点的距离等于圆 O 的半径,$\therefore$ 点 P 为直线 l 与圆 O 的交点,$\therefore$ 点 P 的个数为 2. 故选 B.

2. C 【解析】如图，直线 $y=\frac{3}{4}x+3$ 分别与 x 轴、y 轴交于点 B，A，过 O 作 $OH\perp AB$ 于 H. 当 $x=0$ 时，$y=3$，$\therefore OA=3$. 当 $y=0$ 时，$\frac{3}{4}x+3=0$，$\therefore x=-4$，$\therefore OB=4$，$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=5$. $\because$ $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{1}{2}AB\cdot OH=\frac{1}{2}OB\cdot OA$，$\therefore 5\times OH=3\times4$，$\therefore OH=2.4$，$\therefore O$ 到直线 l 的距离 $d=2.4$. $\because$ $\odot O$ 的半径 $r=2.5$，$\therefore d<r$，$\therefore$ 直线 l 与 $\odot O$ 的位置关系是相交. 故选 C.



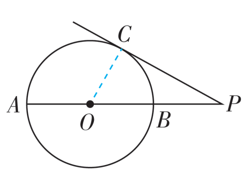
（第 2 题图）



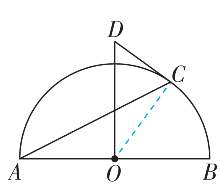
（第 3 题图）

3. C 【解析】如图，令 OC 与 AB 的交点为 D. $\because$ OC 为半径，AB 为弦，且 $OC\perp AB$，$\therefore AD=\frac{1}{2}AB=2\sqrt{3}$. $\because$ $\angle ABC=30°$，$\therefore \angle AOC=2\angle ABC=60°$. 在 $\triangle ADO$ 中，$\sin\angle AOD=\frac{AD}{OA}$，$\therefore OA=\frac{AD}{\sin 60°}=\frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=4$，即 $\odot O$ 的半径为 4. $\because$ $OP=5>4$，$\therefore$ 点 P 在 $\odot O$ 外，故选 C.

4. B 【解析】如图，连接 OC. $\because$ PC 是 $\odot O$ 的切线，$\therefore OC\perp PC$. $\because$ $\angle P=30°$，$OC=2$，$\therefore OP=2OC=4$. 由勾股定理得 $PC=\sqrt{OP^2-OC^2}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$，故选 B.



（第 4 题图）



（第 5 题图）

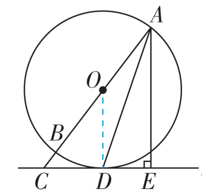
5. C 【解析】如图，连接 OC. $\because$ $\angle CAB=27°$，$\therefore \angle COB=2\angle CAB=54°$. $\because$ CD 与 $\odot O$ 相切于点 C，$\therefore CD\perp OC$. 又 $\because$ $OD\perp AB$，$\therefore \angle OCD=\angle BOD=90°$，$\therefore \angle D+\angle COD=90°$，$\angle COB+\angle COD=90°$，$\therefore \angle D=\angle COB=54°$，故选 C.

6. $70°$ 【解析】$\because$ PA，PB 是圆 O 的切线，A，B 为切点，$\therefore PA=PB$，$PA\perp AC$，$\therefore \angle PAC=90°$，$\therefore \angle PBA=\angle PAB=90°-\angle BAC=90°-35°=55°$，$\therefore \angle P=180°-\angle PBA-\angle PAB=180°-55°-55°=70°$，故答案为 $70°$.

7. (1)【证明】连接 OD，如图.

$\because$ 直线 l 与 $\odot O$ 相切于点 D，

$\therefore OD\perp CE$.



$\because$ $AE\perp CE$，

$\therefore OD/\!/AE$，

$\therefore \angle ODA=\angle EAD$.

$\because$ $OA=OD$，

$\therefore \angle ODA=\angle OAD$，

$\therefore \angle OAD=\angle EAD$，$\therefore AD$ 平分 $\angle CAE$.

(2)【解】如图，设 $\odot O$ 的半径为 r，则 $OB=OD=r$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OCD$ 中，$\because$ $OD=r$，$CD=3$，$OC=r+1$，$\therefore r^2+3^2=(r+1)^2$，

解得 $r=4$，即 $\odot O$ 的半径为 4.

8. (1)【解】$\because$ $\angle BAE=\angle CAD$，$\therefore \angle BAE+\angle BAD=\angle CAD+\angle BAD$，即 $\angle EAD=\angle BAC$. 又 $\because$ $\angle ADE=\angle ACB$，$AD=AC$，$\therefore \triangle ADE\cong\triangle ACB$(ASA)，$\therefore AE=AB$. $\because$ $AB=8$，$\therefore AE=8$.

(2)【证明】如图，连接 BO 并延长交 $\odot O$ 于点 F，连接 AF.

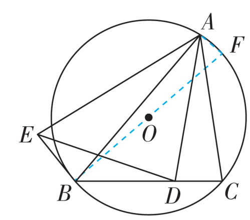
$\because$ BF 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle BAF=90°$，

$\therefore \angle AFB+\angle ABF=90°$.

$\because$ $\angle AFB=\angle ACB$，

$\therefore \angle ACB+\angle ABF=90°$.



在 $\triangle ADC$ 中，$AD=AC$，

$\therefore \angle ACB=\angle ADC$，

$\therefore 2\angle ACB+\angle CAD=180°$.

由(1)知 $AE=AB$，

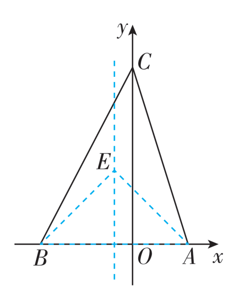
$\therefore \angle AEB=\angle ABE$，

$\therefore 2\angle ABE+\angle BAE=180°$.

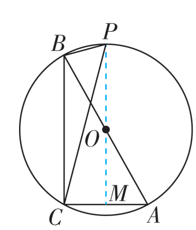
$\because$ $\angle BAE=\angle CAD$，$\therefore \angle ACB=\angle ABE$.

$\because$ $\angle ACB+\angle ABF=90°$，$\therefore \angle ABE+\angle ABF=90°$，即 $\angle OBE=90°$. $\because$ OB 为半径，$\therefore EB$ 是 $\odot O$ 的切线.

9. A 【解析】如图，以 AB 为斜边在 x 轴上方作等腰直角 $\triangle ABE$. 在 $\triangle ABC$ 的外接圆中，$\because$ $\angle ACB=45°$，$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 所对的圆心角为 $90°$. $\because$ 圆心在弦 AB 的垂直平分线上，且 $EA=EB$，$\angle AEB=90°$，$\therefore$ 点 E 即为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心，$\therefore AE$，BE 为 $\triangle ABC$ 外接圆的半径. $\because$ $A(3,0)$，$B(-5,0)$，$\therefore AB=8$. $\because$ $AE^2+BE^2=AB^2$，$\therefore AE=4\sqrt{2}$，故选 A.



（第 9 题图）

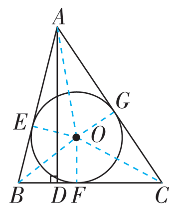


（第 10 题图）

10. C 【解析】如图，过 O 作 $OM\perp AC$ 于 M，延长 MO 交 $\odot O$ 于 P，此时点 P 到 AC 的距离最大，且点 P 到 AC 距离的最大值

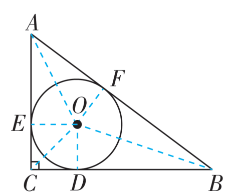
为 PM 的长. $\because OM\perp AC$，$\angle A=\angle BPC=60^\circ$，$\odot O$ 的半径为 6，$\therefore OP=OA=6$，$\therefore OM=OA\cdot\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}OA=\frac{\sqrt{3}}{2}\times 6=3\sqrt{3}$，$\therefore PM=OP+OM=6+3\sqrt{3}$，$\therefore$ 点 P 到 AC 距离的最大值是 $6+3\sqrt{3}$. 故选 C.

11. A　【解析】如图，连接 OA，OB，OC，过点 O 分别作 AB，AC，BC 的垂线，垂足为点 E，G，F，则 $OE=OF=OG=R$，$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\times AB\cdot R+\frac{1}{2}\times BC\cdot R+\frac{1}{2}\times AC\cdot R=\frac{1}{2}R(AB+AC+BC)$.



$\because AB+AC=\frac{5}{3}BC$，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}R\left(\frac{5}{3}BC+BC\right)=\frac{1}{2}R\cdot\frac{8}{3}BC$. $\because AD$ 的长为 h，$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot h$，$\therefore \frac{1}{2}R\cdot\frac{8}{3}BC=\frac{1}{2}BC\cdot h$，$\therefore h=\frac{8}{3}R$，$\therefore \frac{R}{h}=\frac{R}{\frac{8}{3}R}=\frac{3}{8}$，故选 A.

12. D　【解析】如图，连接 OA，OB，OC，作 $OE\perp AC$ 于点 E，$OD\perp BC$ 于点 D，$OF\perp AB$ 于点 F. 易证四边形 $OECD$ 是正方形. 设 $OE=OD=OF=r$，则 $EC=CD=r$，$\therefore AE=AF=b-r$，$BD=BF=a-r$. $\because AF+BF=AB$，$\therefore b-r+a-r=c$，$\therefore r=\frac{a+b-c}{2}$，$\therefore d=a+b-c$，故选项 A 正确. $\because S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOB}$，



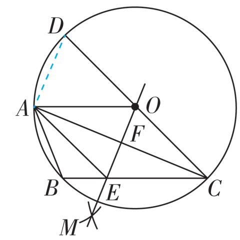
$\therefore \frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$，$\therefore ab=r(a+b+c)$，$\therefore r=\frac{ab}{a+b+c}$，$\therefore d=\frac{2ab}{a+b+c}$，故选项 B 正确. $\because d=a+b-c$，$\therefore d^2=(a+b-c)^2=(a+b)^2-2c(a+b)+c^2=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2$. $\because a^2+b^2=c^2$，$\therefore d^2=2c^2+2ab-2ac-2bc=2(c^2+ab-ac-bc)=2[(c^2-ac)+b(a-c)]=2(c-a)(c-b)$，$\therefore d=\sqrt{2(c-a)(c-b)}$，故选项 C 正确. 排除法可知选项 D 错误. 故选 D.

刷有所得

三角形内切圆半径公式

$r=\frac{2S}{a+b+c}$（任意三角形），$r=\frac{a+b-c}{2}$（直角三角形），其中 r 为三角形内切圆半径，S 为三角形面积，a，b，c 为三角形三边长，c 为最长边.

13. C　【解析】如图，连接 AD，设 OE 交 AC 于点 F. $\because OA=OC$，$\therefore \angle OAC=\angle OCA$. $\because AO/\!/BC$，$\therefore \angle OAF=\angle ACE$，$\therefore \angle OCA=\angle ACE$，$\therefore \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$，故 A 不符合题意. 由题知 OE 垂直平分 AC，$\therefore \angle OFC=\angle EFC=90^\circ$. $\because \angle OCF=\angle ECF$，$CF=CF$，$\therefore \triangle EFC\cong\triangle OFC$（ASA），$\therefore OC=CE=OA$. $\because AO/\!/EC$，$\therefore$ 四边形 $AOCE$ 为菱形，故 D 不符合题意. $\because \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AD}$，$\therefore AB=AD$. $\because$ 四边形 $AOCE$ 为菱形，$\therefore AE=OC=OD$，$AE/\!/CD$，$\therefore$ 四边形 $AEOD$ 是平行四边形，$\therefore AD=OE$，$\therefore AB=OE$，故 B 不符合题意. $\because AE/\!/CD$，$\therefore \angle AOD=\angle OAE=\angle OAF+\angle EAF$. $\because \angle BAC=\angle BAE+\angle EAF$，$\angle OAF$ 与 $\angle BAE$ 不一定相等，$\therefore \angle AOD$ 与 $\angle BAC$ 不一定相等，故 C 符合题意. 故选 C.

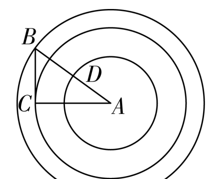


14. 26　【解析】$\because \odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，且 $AF=6$，$CF=5$，$\therefore AD=AF=6$，$CE=CF=5$，$BE=BD$. $\because AD=3BD$，$\therefore BE=BD=\frac{1}{3}AD=2$，$\therefore \triangle ABC$ 的周长为 $AC+BC+AB=AF+CF+CE+BE+BD+AD=26$.

刷提升

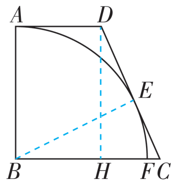
1. C　【解析】连接 OC. 由题可得 $\angle OCB=\angle OBC=35^\circ$，$\therefore \angle BOC=180^\circ-\angle OBC-\angle OCB=110^\circ$，$\therefore \angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=55^\circ$. 由内心性质可知 AI 平分 $\angle BAC$，$\therefore \angle CAI=\frac{1}{2}\angle BAC=27.5^\circ$. 故选 C.

2. A　【解析】$\because$ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=3$，$AC=4$，$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$. $\because D$ 为 AB 的中点，$\therefore AD=\frac{1}{2}AB=\frac{5}{2}$. 如图，当 $\odot A$ 的半径 $r=AD=\frac{5}{2}$ 时，点 D 在 $\odot A$ 上；当 $\odot A$ 的半径 $r=AC=4$ 时，点 C 在 $\odot A$ 上，点 D 在圆内；当 $\odot A$ 的半径 $r=AB=5$ 时，点 B 在 $\odot A$ 上，点 C，D 在圆内. 故当 $\odot A$ 的半径满足 $0<r\leqslant\frac{5}{2}$ 时，B，C，D 中没有点在 $\odot A$ 内，$\frac{5}{2}<r\leqslant 4$ 时，点 D 在 $\odot A$ 内；当 $\odot A$ 的半径满足 $4<r\leqslant 5$ 时，点 C，D 在 $\odot A$ 内；当 $\odot A$ 的半径满足 $r>5$ 时，点 B，C，D 都在 $\odot A$ 内，$\therefore$ 若 B，C，D 三点中只有一点在 $\odot A$ 内，则 $\odot A$ 的半径 r 的取值范围是 $\frac{5}{2}<r\leqslant 4$. 故选 A.

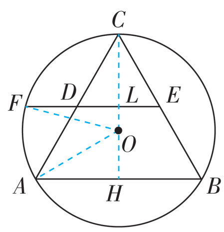


3. D　【解析】如图，连接 BE，作 $DH\perp BC$ 于点 H，则 $\angle BHD=$

$\angle CHD=90°$. ∵ AD,CD 分别与扇形 BAF 相切于点 A,E，$AB=15$，$BC=17$，∴ $AB=EB=15$，$AD\perp AB$，$CD\perp EB$，$AD=ED$，∴ $\angle BAD=\angle BEC=90°$，∴ $CE=\sqrt{BC^2-EB^2}=\sqrt{17^2-15^2}=8$. ∵ $AD/\!/BC$，∴ $\angle ADH=\angle CHD=90°$. ∵ $\angle BAD=\angle ADH=\angle BHD=90°$，∴ 四边形 $ABHD$ 是矩形，∴ $BH=AD$，$DH=AB=15$，∴ $CH=BC-BH=17-AD$. ∵ $DH^2+CH^2=CD^2$，且 $CD=CE+ED=8+AD$，∴ $15^2+(17-AD)^2=(8+AD)^2$，解得 $AD=9$，故选 D.

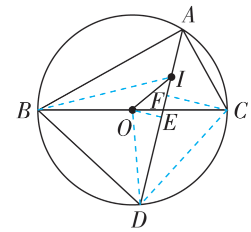


4. D 【解析】如图，连接 CO 并延长交 AB 于点 H，交 EF 于点 L，连接 OA,OF. ∵ $\odot O$ 是等边 $\triangle ABC$ 的外接圆，$\odot O$ 的半径 $r=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，∴ $\angle AOC=\frac{1}{3}\times 360°=120°$，$OA=OC=OF=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$CH\perp AB$，∴ $\angle AOH=180°-\angle AOC=60°$，$\angle AHC=90°$，∴ $\frac{AH}{OA}=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{OH}{OA}=\cos 60°=\frac{1}{2}$，∴ $AH=\frac{\sqrt{3}}{2}OA=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=1$，$OH=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴ $CH=OC+OH=\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$. ∵ D,E 分别为 AC,BC 的中点，∴ $CD=AD$，$DE/\!/AB$，∴ $\frac{CL}{HL}=\frac{CD}{AD}=1$，$\angle OLF=180°-\angle AHC=90°$，∴ $CL=HL=\frac{1}{2}CH=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $OL=HL-OH=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{6}$，∴ $FL=\sqrt{OF^2-OL^2}=\sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. ∵ $CD=DA$，$CL=LH$，∴ $DL=\frac{1}{2}AH=\frac{1}{2}$，∴ $DF=FL-DL=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，故选 D.



5. $(-2,1)$ 或 $(-2-2\sqrt{2},-1)$ 或 $(-2+2\sqrt{2},-1)$ 【解析】∵ $\odot M$ 与 x 轴相切，∴ M 点到 x 轴的距离为 1. 当 $y=1$ 时，$-0.25x^2-x=1$，解得 $x_1=x_2=-2$，此时 M 点的坐标为 $(-2,1)$. 当 $y=-1$ 时，$-0.25x^2-x=-1$，解得 $x_1=-2-2\sqrt{2}$，$x_2=-2+2\sqrt{2}$，此时 M 点的坐标为 $(-2-2\sqrt{2},-1)$ 或 $(-2+2\sqrt{2},-1)$. 综上所述，M 点的坐标为 $(-2,1)$ 或 $(-2-2\sqrt{2},-1)$ 或 $(-2+2\sqrt{2},-1)$. 故答案为 $(-2,1)$ 或 $(-2-2\sqrt{2},-1)$ 或 $(-2+2\sqrt{2},-1)$.

6. (1)【证明】连接 BI，如图. ∵ 点 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，∴ BI 平分 $\angle ABC$，AI 平分 $\angle BAC$，∴ $\angle ABI=\angle CBI$，$\angle BAD=\angle CAD$. ∵ $\angle DBC=\angle CAD$，∴ $\angle DBC=\angle BAD$. ∵ $\angle DIB=\angle BAD+\angle ABI$，$\angle DBI=\angle DBC+\angle CBI$，∴ $\angle DIB=\angle DBI$，∴ $BD=ID$.



(2)【解】连接 CD,OD，过点 O 作 $OE\perp AD$ 于点 E，过点 C 作 $CF\perp AD$ 于点 F，如图. ∵ $\angle BAC=90°$，$AC=6$，$AB=8$，∴ $BC=\sqrt{6^2+8^2}=10$，BC 为 $\odot O$ 的直径.

∵ $\angle BAD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC=45°$，∴ $AF=CF=\frac{\sqrt{2}}{2}AC=3\sqrt{2}$.

∵ $\angle DBC=\angle CAD=45°$，$\angle BCD=\angle BAD=45°$，

∴ $\triangle BCD$ 为等腰直角三角形，∴ $BD=CD=\frac{\sqrt{2}}{2}BC=5\sqrt{2}$.

在 Rt $\triangle CDF$ 中，∵ $CD=5\sqrt{2}$，$CF=3\sqrt{2}$，∴ $DF=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-(3\sqrt{2})^2}=4\sqrt{2}$，∴ $AD=AF+DF=3\sqrt{2}+4\sqrt{2}=7\sqrt{2}$.

∵ $OE\perp AD$，∴ $DE=\frac{1}{2}AD=\frac{7\sqrt{2}}{2}$. ∵ $DI=DB=5\sqrt{2}$，∴ $EI=DI-DE=5\sqrt{2}-\frac{7\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$. 在 Rt $\triangle DOE$ 中，∵ $OD=5$，$DE=\frac{7\sqrt{2}}{2}$，∴ $OE=\sqrt{5^2-\left(\frac{7\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴ 在 Rt $\triangle IOE$ 中，$\tan\angle OID=\frac{OE}{EI}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{3\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{3}$.

方法技巧

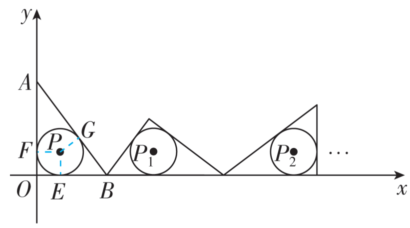
圆中常作的辅助线

在对圆的有关题目进行计算或证明时，往往需要添加辅助线，常见作法如下：有切点，连半径；有关弦的计算，常作表示弦心距的线段或连接半径；有直径，作直径所对的圆周角；圆中有 45°的圆周角时，作同弧所对的 90°的圆心角等.

刷素养

7. $(8\,101,1)$ 【解析】∵ $A(0,4)$，$B(3,0)$，∴ $OA=4$，$OB=3$，∴ 在 Rt$\triangle AOB$ 中，$AB=\sqrt{3^2+4^2}=5$. 根据直角三角形内切圆的半径公式可知，$r=\frac{3+4-5}{2}=1$. 如图，过点 P 作 $PE\perp OB$ 于 E，$PF\perp AO$ 于 F，$PG\perp AB$ 于 G，易得四边形 $PEOF$ 为正方形，∴ 点 P 的坐标为 $(1,1)$. 根据切线长定理可知，$AF=AG=4-1=3$，$OE=OF=1$，$BE=BG=3-1=2$. 易得第 1 次滚动后点 P_1 的横坐标为 $1+2+2=5$，即点 P_1 的坐标为 $(5,1)$. 同理可得，点 P_2 的坐标为 $(11,1)$，点 P_3 的坐标为 $(13,1)$. ∵ 每滚动三

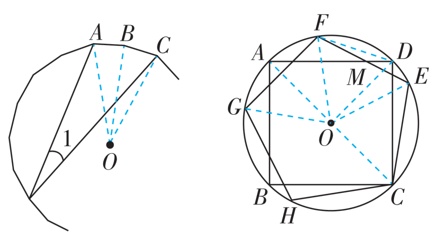
次为一个循环，且 $2\,025\div3=675$，∴ 第 2 025 次滚动后点 $P_{2\,025}$ 的横坐标为 $675\times(13-1)+1=8\,101$，∴ 点 $P_{2\,025}$ 的坐标为 $(8\,101,1)$. 故答案为 $(8\,101,1)$.



考点 30　与圆有关的计算

刷基础

1. B 【解析】如图，设正 n 边形外接圆的圆心为 O，连接 OA，OB，OC. 由圆周角定理得 $\angle AOC=2\angle1=40°$. ∵ $AB=BC$，∴ $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}$，∴ $\angle AOB=\angle BOC=20°$，∴ $n=\dfrac{360°}{20°}=18$，故选 B.



（第 1 题图）　（第 2 题图）

2. B 【解析】如图，连接 OG,OF,OD,OE,DF,AC，则 AC 是正五边形 $CEFGH$ 和正方形 $ABCD$ 的对称轴，且 $\angle AOD=\dfrac{360°}{4}=90°$，$\angle FOG=\angle EOF=\dfrac{360°}{5}=72°$. ∵ AC 是正五边形 $CEFGH$ 的对称轴，∴ $\angle AOG=\angle AOF=\dfrac{1}{2}\angle FOG=36°$，∴ $\angle DOF=90°-36°=54°$，∴ $\angle DOE=72°-54°=18°$，∴ $\angle AMF=\angle MFD+\angle MDF=\dfrac{1}{2}\angle DOE+\dfrac{1}{2}\angle AOF=\dfrac{1}{2}\times18°+\dfrac{1}{2}\times36°=9°+18°=27°$. 故选 B.

3. B 【解析】由弧长计算公式可得，半径为 2 的⊙O 中，120°的圆心角所对的弧长为 $\dfrac{120\pi\times2}{180}=\dfrac{4\pi}{3}$，故选 B.

4. B 【解析】根据扇形的面积公式，得 $S_{扇形}=\dfrac{1}{2}lR=\dfrac{1}{2}\times6\pi\times9=27\pi$. 故选 B.

5. D 【解析】∵ $\angle BAC=90°$，$AB=AC$，$BC=4$，∴ $\angle ABC=\angle ACB=45°$，∴ $AB=AC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}BC=2\sqrt{2}$，∴ $S_{阴影部分}=S_{扇形BCE}+S_{扇形DBC}-2S_{\triangle ABC}=\dfrac{45\pi\times4^2}{360}+\dfrac{45\pi\times4^2}{360}-2\times\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}=4\pi-8$. 故选 D.

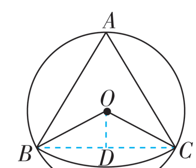
6. D 【解析】设圆锥底面的半径为 r，则圆锥的底面周长为 $2\pi r$. ∵ 圆锥的侧面展开图是一个圆心角为 72°的扇形，且扇形的半径 l 是 5，∴ 扇形的弧长为 $\dfrac{72\pi\times5}{180}=2\pi$. ∵ 圆锥的底面周长与侧面展开图扇形的弧长相等，∴ $2\pi r=2\pi$，∴ $r=1$，∴ 圆锥的高为 $\sqrt{5^2-1^2}=2\sqrt{6}$，∴ 该圆锥的体积为 $\dfrac{1}{3}\pi\times1^2\times2\sqrt{6}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi$，故选 D.

关键点拨

圆锥的体积公式

$V=\dfrac{1}{3}\pi r^2h$（r 为底面半径，h 为圆锥的高）.

7. B 【解析】如图，连接 BC，作 $OD\perp BC$ 于点 D，则 $BD=CD$. ∵ $\angle BOC=120°$，∴ $\angle A=\dfrac{1}{2}\angle BOC=60°$. ∵ $AB=AC$，∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形. ∵ $OB=OC$，∴ $\angle OBD=30°$，∴ $BD=OB\cdot\cos30°=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，∴ $AB=BC=2BD=3\sqrt{3}$. 设圆锥底面圆的半径为 r，则 $2\pi r=\dfrac{60\pi\cdot3\sqrt{3}}{180}$，解得 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴ 该圆锥的底面圆的半径为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 B.



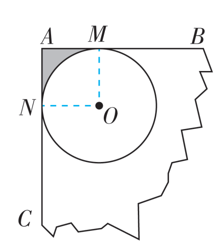
8. $1\,400\pi$　【解析】圆锥的侧面积是 $\dfrac{1}{2}\times2\pi\times20\times70=1\,400\pi(\mathrm{cm}^2)$. 故答案为 $1\,400\pi$.

刷提升

1. A 【解析】由折叠可得 $OC=BC=\dfrac{1}{2}OB=\dfrac{1}{2}OA$，$\angle ACO=90°$，∴ $\angle OAC=30°$，∴ $\angle AOB=60°$. 在 Rt$\triangle OAC$ 中，$\sin\angle AOC=\dfrac{AC}{OA}$，∴ $\sin60°=\dfrac{2\sqrt{3}}{OA}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，∴ $OA=4$，∴ $\overset{\frown}{AB}$ 的长为 $\dfrac{60\pi\times4}{180}=\dfrac{4\pi}{3}$. 故选 A.

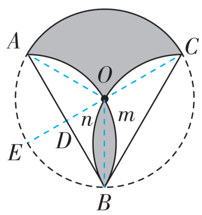
2. B 【解析】设圆锥的母线长为 l cm，扇形的圆心角为 $n°$. ∵ 圆锥的底面圆周长为 8π cm，∴ 圆锥的侧面展开图扇形的弧长为 8π cm. 由题意得 $\begin{cases}\dfrac{n\pi l}{180}=8\pi,\\ \dfrac{\pi l^2n}{360}=72\pi,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}l=18,\\ n=80,\end{cases}$ ∴ 扇形的圆心角为 80°，故选 B.

3. D 【解析】如图，令⊙O 与 AB 及 AC 的切点分别为 M，N，连接 OM，ON，则 $OM\perp AB$，$ON\perp AC$. 又因为 $OM=ON$，$\angle A=90°$，所以四边形 $OMAN$ 是正方形，所以 $\angle MON=90°$. 因为⊙O 的半径

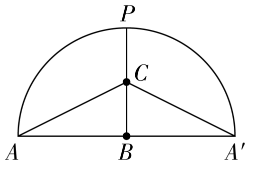


为 20 cm,所以正方形 $AMON$ 的面积为 400 cm^2,扇形 OMN 的面积为$\frac{90\cdot\pi\cdot20^2}{360}=100\pi(cm^2)$,所以阴影部分的面积为 $(400-100\pi)cm^2$. 故选 D.

4. $\frac{\pi}{3}$ 【解析】如图,作 $OE\perp AB$ 于点 D,交⊙O 于点 E,连接 AO,BO,CO. ∵ 弓形 AEB 折叠后为弓形 AOB 过圆心,∴ $OD=\frac{1}{2}EO=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}$,∴ $\angle OAD=30°$,∴ $\angle AOD=60°$,∴ $\angle AOB=2\angle AOD=120°$. 同理 $\angle BOC=120°$,∴ $\angle AOC=120°$. ∵ $OA=OB=OC=1$,∴ $\overset{\frown}{AO}=\overset{\frown}{OC}=\overset{\frown}{OmB}=\overset{\frown}{OnB}$,将弓形 OnB 绕着点 O 顺时针旋转 120°得弓形 OA,弓形 OmB 绕着点 O 逆时针旋转 120°得弓形 OC,∴ 阴影部分的面积为 $S_{扇形AOC}=\frac{120\pi r^2}{360}=\frac{\pi}{3}$,故答案为$\frac{\pi}{3}$.

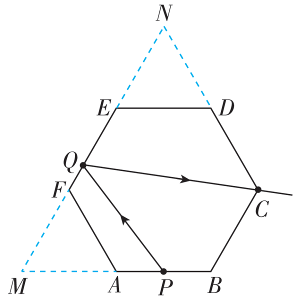


5.【解】根据题意可得 $8\times\pi=\frac{n\times\pi\times8}{180}$,解得 $n=180$. 如图即为生日帽的侧面展开图,$PB\perp AA'$,$AC+A'C$ 的值即为彩带长度的最小值. 在 Rt△ABC 中,$AC=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$(cm),同理可得,$A'C=4\sqrt{5}$ cm,所以彩带长度的最小值为 $4\sqrt{5}+4\sqrt{5}=8\sqrt{5}$(cm).



刷 素养

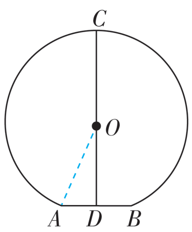
6. $\frac{10}{7}$ 【解析】如图,延长 EF,BA 交于点 M,延长 FE,CD 交于点 N. 易得 △AMF 和 △DEN 均为边长为 2 的等边三角形,∴ $CN=4$. ∵ $\angle CQN=\angle PQM$,$\angle N=\angle M$,∴ △PQM∽△CQN,∴ $\frac{QM}{MP}=\frac{QN}{CN}$. 设 $QE=x$,则 $QF=2-x$,$QN=2+x$,∴ $QM=4-x$. ∵ P 是边 AB 的中点,∴ $AP=1$,∴ $MP=3$,∴ $\frac{4-x}{3}=\frac{2+x}{4}$,解得 $x=\frac{10}{7}$,即 $EQ=\frac{10}{7}$.



专题 15 与圆有关定理的证明与计算

刷 难关

1. B 【解析】如图,连接 OA. ∵ D 为 AB 的中点,C 为拱门最高点,线段 CD 经过拱门所在圆的圆心,$AB=1$ m,∴ $CD\perp AB$,$AD=BD=0.5$ m. 设拱门所在圆的半径为 r m,∴ $OA=OC=r$ m. ∵ $CD=2.5$ m,∴ $OD=(2.5-r)$m,∴ $r^2=0.5^2+(2.5-r)^2$,解得 $r=1.3$,∴ 拱门所在圆的半径为 1.3 m,故选 B.



2. $\frac{3}{2}$ 【解析】∵ $\angle C=60°$,$BC=2\sqrt{3}$,∴ $AB=BC\cdot\tan C=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$,∴ $OA=\frac{1}{2}AB=3$. ∵ $\angle BOE=60°$,∴ $\angle AOE=180°-\angle BOE=120°$. ∵ M 是 $\overset{\frown}{AE}$ 的中点,∴ $OM\perp AE$,$\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOE=60°$,∴ $\angle OAD=90°-\angle AOD=30°$,∴ $OD=\frac{1}{2}OA=\frac{3}{2}$,∴ $MD=OM-OD=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$. 故答案为$\frac{3}{2}$.

3.【解】(1)如图,设圆心为 O,连接 OA,OB,BM.

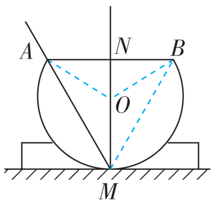
∵ 点 M 是 $\overset{\frown}{AMB}$ 的中点,∴ $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$,∴ $AM=BM$.

∵ $AM=AB$,∴ $AM=BM=AB$,∴ △ABM 是等边三角形,∴ $\angle BAM=\angle AMB=60°$,$MN\perp AB$,$AO$ 平分$\angle MAB$,

∴ $\angle OAM=\angle OAN=30°$,

∴ $OA=OM=2ON$,

∴ $OA=OM=\frac{2}{3}MN=25$ cm.



∵ $ON\perp AB$,∴ $AN=BN=OA\cdot\cos30°=25\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{2}$(cm),

∴ $AB=25\sqrt{3}$ cm. 故$\angle BAM=60°$,$AB=25\sqrt{3}$ cm.

(2) ∵ $\angle AOB=2\angle AMB=120°$,∴ $\overset{\frown}{AMB}$ 的长为 $\frac{240\pi\times25}{180}=\frac{100\pi}{3}$(cm).

(3) $\sqrt{25^2-24^2}=7$(cm),∴ 当水面在点 O 的下方时,鱼缸内水的深度为 $25-7=18$(cm);

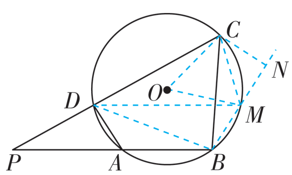
当水面在点 O 的上方时,鱼缸内水的深度为 $25+7=32$(cm).

综上所述,水面的宽度为 48 cm,鱼缸内水的深度为 32 cm 或 18 cm.

4. B 【解析】∵ $\angle D=28°$,∴ $\angle BOC=2\angle D=56°$. ∵ $OC\perp AB$,∴ 点 C 为 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点,∴ $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$,∴ $\angle AOC=\angle BOC=56°$,

$\therefore \angle AOB=2\times56°=112°$. $\because OA=OB$, $\therefore \angle OAB=\angle OBA=\frac{1}{2}\times(180°-112°)=34°$. 故选 B.

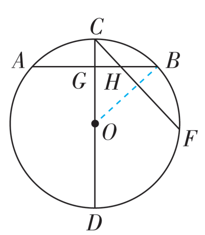
5. 7　【解析】如图，过 D 作 $DM/\!/AB$ 交圆于 M，连接 OC，OM，CM，BD，BM，过 C 作 $CN\perp BM$ 交 BM 的延长线于 N，$\therefore \angle CDM=\angle P=30°$，$\angle BDM=\angle ABD$，$\therefore \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BM}$，$\therefore BM=AD=2$. 由圆周角定理及其推论得到 $\angle CBM=\angle CDM=30°$，$\angle COM=2\angle CDM=60°$. $\because \angle CNB=90°$，$\angle CBN=30°$，$\therefore CN=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}\times5\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$，$BN=\sqrt{3}CN=\frac{15}{2}$，$\therefore MN=BN-BM=\frac{11}{2}$，$\therefore CM=\sqrt{CN^2+MN^2}=7$. $\because \angle COM=60°$，$OC=OM$，$\therefore \triangle OCM$ 是等边三角形，$\therefore OM=CM=7$，$\therefore$ 圆的半径为 7. 故答案为 7.



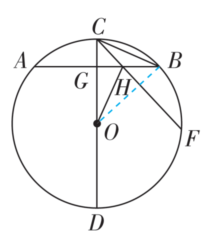
6. (1)【解】如图(1)，连接 OB，设 $OB=OC=r$. $\because CD$ 为⊙O 的直径，弦 $AB\perp CD$ 于点 G，$\therefore \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BC}$，$AG=BG=\frac{1}{2}AB$.

$\because B$ 为弧 CF 的中点，$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BF}$，$OB\perp CF$，$\therefore \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{BF}$，即 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CF}$，$\therefore AB=CF=8$，$\therefore AG=BG=\frac{1}{2}AB=4$.

在 Rt$\triangle OGB$ 中，$OB^2=OG^2+BG^2$，即 $r^2=(r-2)^2+4^2$，解得 $r=5$，故⊙O 的半径长为 5.



图(1)



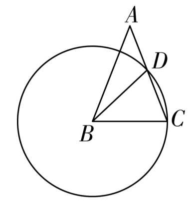
图(2)

(2)【证明】如图(2)，连接 OB. $\because$ 由(1)可得 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BF}$，$\therefore \angle BCH=\angle CBA$，$\therefore HB=HC$. 又$\because OC=OB$，$\therefore OH$ 垂直平分 BC，$\therefore OH\perp BC$.

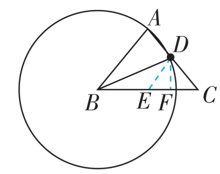
7. $\sqrt{2}\leqslant BC\leqslant\sqrt{6}$ 且 $BC\neq2$　【解析】$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中，$AB=AC=2$，点 D 是 AC 的中点，$\therefore AD=CD=1$.

①若 AC 与⊙B 相切，则 $BD\perp AC$. $\because D$ 是 AC 中点，$\therefore$ 此时 $AB=BC=AC=2$. $\because$ ⊙B 与线段 AC 有两个交点，$\therefore BC\neq2$.

②若⊙B 经过点 C，如图(1)，则 $BD=BC$，$\therefore \angle BDC=\angle BCD$. $\because AB=AC$，$\therefore \angle ABC=\angle C=\angle BDC$，$\therefore \triangle ABC\backsim\triangle BDC$，$\therefore \frac{BC}{CD}=\frac{AC}{BC}$，即 $\frac{BC}{1}=\frac{2}{BC}$，$\therefore BC=\sqrt{2}$.



图(1)

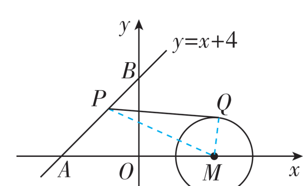


图(2)

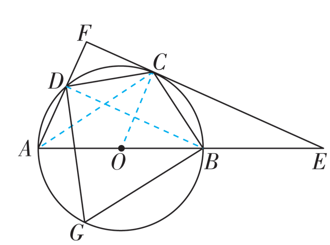
③若⊙B 经过点 A，则 $BD=BA=2$，如图(2)，取 BC 中点 E，连接 DE，过 D 作 $DF\perp BC$ 于点 F. $\because D$，E 分别是 AC，BC 的中点，$\therefore DE=\frac{1}{2}AB=1$，$DE/\!/AB$，$\therefore \angle ABC=\angle DEC=\angle C$，$\therefore DE=DC$，则 $EF=CF$. 设 $EF=CF=x$，则 $CE=BE=2x$，$\therefore BF=3x$. 在 Rt$\triangle DCF$ 中，$DF^2=CD^2-CF^2=1-x^2$，在 Rt$\triangle BDF$ 中，$DF^2=BD^2-BF^2=4-9x^2$，$\therefore 1-x^2=4-9x^2$，解得 $x=\frac{\sqrt{6}}{4}$，$\therefore BC=4x=\sqrt{6}$.

综上，若⊙B 与线段 AC 有两个交点，则 $\sqrt{2}\leqslant BC\leqslant\sqrt{6}$ 且 $BC\neq$ 2. 故答案为 $\sqrt{2}\leqslant BC\leqslant\sqrt{6}$ 且 $BC\neq2$.

8. $2\sqrt{7}$　【解析】如图，连接 MP，MQ. $\because PQ$ 是⊙M 的切线，$\therefore MQ\perp PQ$，$\therefore PQ=\sqrt{PM^2-MQ^2}=\sqrt{PM^2-4}$，$\therefore$ 当 PM 最小时，PQ 最小. 当 $MP\perp AB$ 时，MP 最小. 直线 $y=x+4$ 与 x 轴的交点 A 的坐标为 $(-4,0)$，与 y 轴的交点 B 的坐标为 $(0,4)$，$\therefore OA=OB=4$，$\therefore \angle BAO=45°$，$AM=8$，$\therefore$ 当 $MP\perp AB$ 时，$MP=AM\cdot\sin\angle BAO=8\times\frac{\sqrt{2}}{2}=4\sqrt{2}$，$\therefore PQ$ 的最小值为 $\sqrt{(4\sqrt{2})^2-4}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$，故答案为 $2\sqrt{7}$.



9. (1)【证明】如图，连接 OC，AC.

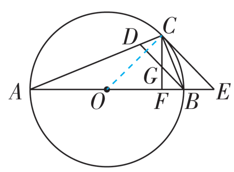


$\because$ 点 C 是 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，$\therefore \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}$，$\therefore \angle FAC=\angle CAE$. $\because OA=OC$，$\therefore \angle CAE=\angle ACO$，$\therefore \angle FAC=\angle ACO$，$\therefore OC/\!/AF$. $\because EF$ 切⊙O 于 C，$\therefore OC\perp EF$，$\therefore \angle OCE=90°$，$\therefore \angle F=\angle OCE=90°$，$\therefore EF\perp AF$.

(2)【解】如图，连接 BD，则 $\angle BGD=\angle BAD$. $\because AB$ 是⊙O 直径，$\therefore \angle ADB=90°$.

在 Rt$\triangle ADB$ 中，$\cos\angle BAD=\cos\angle BGD=\dfrac{2}{5}$，$\therefore \dfrac{AD}{AB}=\dfrac{2}{5}$，$\therefore AB=\dfrac{5}{2}AD=10$，$\therefore OC=OB=\dfrac{1}{2}AB=5$. $\because$ 点 C 是 $\overset{\frown}{BD}$ 的中点，$\therefore \angle COE=\angle BAD$. 在 Rt$\triangle COE$ 中，$\cos\angle COE=\dfrac{OC}{OE}=\dfrac{2}{5}$，$\therefore OE=\dfrac{5}{2}OC=\dfrac{25}{2}$，$\therefore BE=OE-OB=\dfrac{25}{2}-5=\dfrac{15}{2}$.

10. (1)【证明】如图，连接 OC.



$\because CF\perp AB$ 于点 F，$\therefore \angle CFE=90°$.

$\because \angle COE=2\angle A$，$\angle FCE=2\angle A$，

$\therefore \angle COE=\angle FCE$.

又$\because \angle E=\angle E$，$\therefore \triangle COE\backsim\triangle FCE$，

$\therefore \angle OCE=\angle CFE=90°$，即 $OC\perp CE$.

$\because OC$ 是$\odot O$ 的半径，$\therefore CE$ 是$\odot O$ 的切线.

(2)【解】$\because AB$ 为$\odot O$ 的直径，$\therefore \angle ACB=90°$.

$\because BD/\!/CE$，$\therefore \angle BCE=\angle CBD$，

$\therefore \tan\angle CBD=\tan\angle BCE=\dfrac{1}{2}=\dfrac{CD}{BC}$.

$\because OA=OC$，$\therefore \angle OAC=\angle OCA$.

$\because \angle ACO+\angle OCB=\angle BCE+\angle OCB=90°$，

$\therefore \angle ACO=\angle BCE=\angle A$.

$\because \angle FCE=2\angle A$，$\angle FCE=\angle BCE+\angle BCF$，

$\therefore \angle A=\angle BCE=\angle BCF$，$\therefore \angle CBD=\angle BCF$，$\therefore CG=BG$.

$\because \angle BCF+\angle ACF=\angle CBD+\angle BDC=90°$，$\therefore \angle BDC=\angle ACF$，

$\therefore CG=DG$，$\therefore CG=DG=BG=\dfrac{1}{2}BD$.

设 $CD=x$，则 $BC=2CD=2x$，$\therefore BD=\sqrt{CD^2+BC^2}=\sqrt{5}x$.

$\because \tan A=\tan\angle BCE=\dfrac{1}{2}=\dfrac{BC}{AC}$，$\therefore AC=2BC=4x$，$\therefore AD=3x$.

$\because BD/\!/CE$，$\therefore \dfrac{AD}{CD}=\dfrac{AB}{BE}$，$\therefore \dfrac{3x}{x}=\dfrac{AB}{1}$，$\therefore AB=3$.

$\because BC^2+AC^2=AB^2$，$\therefore (2x)^2+(4x)^2=3^2$，$\therefore x=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$，

$\therefore BD=\sqrt{5}x=\dfrac{3}{2}$，$\therefore DG=\dfrac{1}{2}BD=\dfrac{3}{4}$.

关键点拨

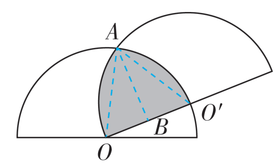
证明切线的方法

已知切点，连半径，证垂直；未知切点，作垂直，证半径.

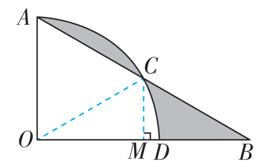
重难专题 16 与圆有关的不规则图形的面积计算

刷 难关

1. A 【解析】如图，连接 OA，AO'，过点 A 作 $AB\perp OO'$于点 B. $\because OA=OO'=AO'=2$，$\therefore \triangle AOO'$是等边三角形，$\therefore \angle AOO'=60°$，$OB=\dfrac{1}{2}OO'=1$，$\therefore AB=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，$\therefore S_{弓形AO'}=S_{扇形AOO'}-S_{\triangle AOO'}=\dfrac{60\pi\times 2^2}{360}-2\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$，$\therefore S_{阴影}=S_{弓形AO'}+S_{扇形AO'O}=\dfrac{2\pi}{3}-\sqrt{3}+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$. 故选 A.



(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. A 【解析】如图，连接 OC，过点 C 作 $CM\perp OB$，垂足为 M. $\because \angle AOB=90°$，$\angle B=30°$，$\therefore \angle OAB=60°$. 又$\because OA=OC$，$\therefore \triangle AOC$ 是等边三角形，$\therefore \angle AOC=60°$，$\angle COD=30°$，$OA=AC$，$\therefore S_{\triangle AOC}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，$S_{扇形OAC}=\dfrac{60\cdot\pi\cdot 4^2}{360}=\dfrac{8}{3}\pi$，$\therefore S_{弓形AC}=\dfrac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}$. $\because OA=4$，$\angle B=30°$，$\therefore AB=2OA=8$. 又$\because AC=OA=4$，$\therefore BC=8-4=4$，$\therefore CM=\dfrac{1}{2}BC=2$. $\because OB=\sqrt{8^2-4^2}=4\sqrt{3}$，$\therefore S_{\triangle OBC}=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 2=4\sqrt{3}$，$S_{扇形OCD}=\dfrac{30\times\pi\times 4^2}{360}=\dfrac{4}{3}\pi$，$\therefore S_{阴影CDB}=4\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi$，$\therefore$ 阴影部分的面积为 $\dfrac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi=\dfrac{4}{3}\pi$. 故选 A.

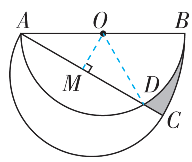
3. $\dfrac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$ 【解析】$\because CD$ 与$\odot O$ 相切于点 E，$\therefore OE\perp CD$，$\therefore \angle OEC=\angle OED=90°$. $\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore AB/\!/CD$. $\because \angle ABE=15°$，$\therefore \angle BEC=15°$，$\therefore \angle OEB=\angle OEC-\angle BEC=75°$. $\because OB=OE$，$\therefore \angle OBE=\angle OEB$，$\therefore \angle ABO=\angle OBE-\angle ABE=75°-15°=60°$. 又$\because OA=OB$，$\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形，$\therefore AB=OA=OB=4$，$\angle AOB=60°$. $\because \angle OED=90°$，$AB/\!/DC$，$\therefore \angle AFO=90°$. 在 Rt$\triangle AOF$ 中，易知$\angle AOF=\dfrac{1}{2}\angle AOB=30°$，$\therefore AF=\dfrac{1}{2}OA=2$，$\therefore OF=2\sqrt{3}$，$\therefore S_{阴影}=S_{扇形AOE}-S_{\triangle AOF}=\dfrac{30\times\pi\times 4^2}{360}-\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\times 2=\dfrac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$，故答案为$\dfrac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}$.

刷有所得

扇形面积计算公式：设圆心角是 $n°$，半径为 R 的扇形面积为 S，则 $S=\dfrac{n}{360}\pi R^2$ 或 $S=\dfrac{1}{2}lR$(其中 l 为扇形的弧长).

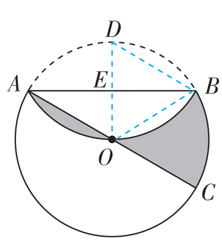
4. $\dfrac{1}{6}\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 【解析】如图，连接 OD，过点 O 作 AD 的垂线，垂

足为 M. ∵ $\angle BAC=30°$, ∴ $\angle BOD=60°$. ∵ $AB=2$, ∴ $S_{扇形ABC}=\frac{30\cdot\pi\cdot2^2}{360}=\frac{1}{3}\pi$, $S_{扇形OBD}=\frac{60\cdot\pi\cdot1^2}{360}=\frac{1}{6}\pi$. ∵ $\angle BAC=30°$, $\angle AMO=90°$, ∴ $OM=\frac{1}{2}OA=\frac{1}{2}$, ∴ $AM=\sqrt{3}OM=\frac{\sqrt{3}}{2}$, ∴ $AD=2AM=\sqrt{3}$, ∴ $S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$, ∴ $S_{阴影}=\frac{1}{3}\pi-\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}$. 故答案为 $\frac{1}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{4}$.

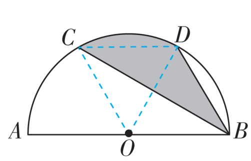


5. 10π　【解析】由旋转的性质可知 $AD=AB=3$, $AE=AC=7$, $\angle BAD=\angle CAE=90°$, $\triangle ABC\cong\triangle ADE$, ∴ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ADE}$, ∴ 所求的面积为 $S_{扇形ACE}+S_{\triangle ABC}-(S_{扇形ABD}+S_{\triangle ADE})=S_{扇形ACE}-S_{扇形ABD}=\frac{90\pi\cdot AC^2}{360}-\frac{90\pi\cdot AB^2}{360}=\frac{90\pi\times7^2}{360}-\frac{90\pi\times3^2}{360}=\frac{1}{4}\pi(7^2-3^2)=10\pi$. 故答案为 10π.

6. $\frac{8\pi}{3}$　【解析】过点 O 作 $OD\perp AB$ 于点 E, 交⊙O 于点 D, 连接 BD, OB, 如图所示. ∵ ⊙O 的半径为 4, ∴ $OA=OB=OD=4$. 由折叠的性质得 $BD=OB=4$, ∴ $OD=OB=BD=4$, ∴ $\triangle OBD$ 是等边三角形. ∵ $OD\perp AB$, $\angle BOD=\angle OBD=60°$, ∴ $\angle OBA=\frac{1}{2}\angle OBD=30°$. ∵ $OA=OB=4$, ∴ $\angle OAB=\angle OBA=30°$, $S_{弓形OA}=S_{弓形OB}$, ∴ $\angle BOC=\angle OAB+\angle OBA=60°$, ∴ $S_{扇形BOC}=\frac{60\pi\times4^2}{360}=\frac{8\pi}{3}$, ∴ $S_{阴影}=S_{扇形BOC}=\frac{8\pi}{3}$.



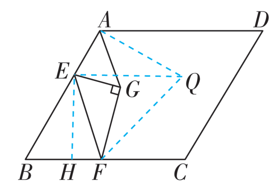
7. $\frac{8}{3}\pi$　【解析】如图, 连接 OC, OD, CD. 由题意可得 $\angle AOC=\angle COD=\angle BOD=60°$. ∵ $OC=OD$, ∴ $\triangle COD$ 是等边三角形, ∴ $\angle OCD=60°$, ∴ $\angle OCD=\angle AOC$, ∴ $CD\,//\,AB$, ∴ $S_{\triangle COD}=S_{\triangle BCD}$, ∴ $S_{阴影}=S_{扇形COD}=\frac{60\pi\times4^2}{360}=\frac{8}{3}\pi$, 故答案为 $\frac{8}{3}\pi$.



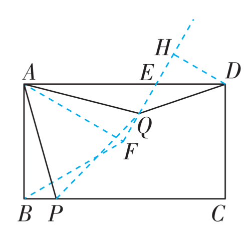
重难专题17　主从联动问题

刷难关

1. C　【解析】如图, 过 E 作 $EQ//BC$, 过 A 作 AB 的垂线交 EQ 于点 Q, 则 $\angle AEQ=\angle B=60°$, ∴ $\angle AQE=\angle EFG=30°$. ∵ $\angle EGF=\angle EAQ=90°$, ∴ $\triangle AEQ\backsim\triangle GEF$, ∴ $\frac{AE}{EG}=\frac{EQ}{EF}$, ∴ $\frac{AE}{EQ}=\frac{EG}{EF}$. ∵ $\angle AEG=\angle QEF=60°+\angle QEG$, ∴ $\triangle AEG\backsim\triangle QEF$, ∴ $\frac{AG}{QF}=\frac{AE}{QE}=\sin30°=\frac{1}{2}$, ∴ $AG=\frac{1}{2}QF$. 过 E 作 $EH\perp BC$ 于点 H, 则 $EH=BE\cdot\sin60°=4\sqrt{3}$. ∵ 点 F 是 BC 上的一点, ∴ $QF\perp BC$ 时 QF 最小, 此时 $QF=EH=4\sqrt{3}$, ∴ AG 的最小值为 $\frac{1}{2}QF=2\sqrt{3}$.



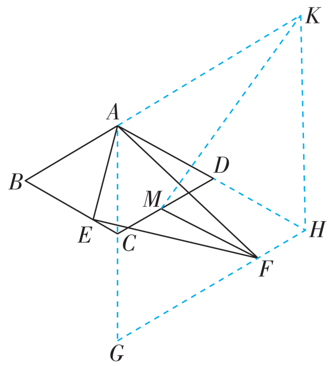
2. A　【解析】如图, 连接 PQ, 以 AB 为边向右作等边 $\triangle ABF$, 作射线 FQ 交 AD 于点 E, 过点 D 作 $DH\perp QE$ 于 H. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形, ∴ $\angle ABP=\angle BAD=90°$. ∵ $\angle BAF=\angle PAQ=60°$, ∴ $\angle BAP=\angle FAQ$. 在 $\triangle BAP$ 和 $\triangle FAQ$ 中, $\begin{cases}BA=FA,\\ \angle BAP=\angle FAQ,\\ PA=QA,\end{cases}$ ∴ $\triangle BAP\cong\triangle FAQ$ (SAS), ∴ $\angle ABP=\angle AFQ=90°$, ∴ 点 Q 在射线 FE 上运动. ∵ $\angle FAE=90°-60°=30°$, ∴ $\angle AEF=90°-30°=60°$. ∵ $AB=AF=5$, $AE=AF\div\cos30°=\frac{10\sqrt{3}}{3}$. ∵ $AD=BC=5\sqrt{3}$, ∴ $DE=AD-AE=\frac{5\sqrt{3}}{3}$. ∵ $DH\perp EF$, $\angle DEH=\angle AEF=60°$, ∴ $DH=DE\cdot\sin60°=\frac{5\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{2}$, 根据垂线段最短可知, 当点 Q 与 H 重合时, DQ 的值最小, 最小值为 $\frac{5}{2}$, 故选 A.



3. $\sqrt{19}$　【解析】由题可知 $\triangle AEF$ 是含有 30°角的直角三角形. 如图(1), 连接 AC, 我们先探索点 F 的运动轨迹, 找几个特殊点. 当点 E 在 AB 上运动时, ∵ $\angle BAD=120°$, ∴ $\angle BAC=60°=\angle EAF$, 此时点 F 就在直线 AC 上运动, 当 E 运动到点 B 时, F 运动到 AC 延长线上的点 G 处, 且 $AG=2AB=2AC$; 当 E 在 BC 上运动时, 我们取 E 运动到点 C 处, 此时 $\angle EAF=\angle CAD=60°$, ∴ F 在 AD 延长线上的点 H 处, 并且满足 $AH=2AC=2AD=AG$; 当点 E 在 CD 上运动时, 我们取 E 运动到点 D 处, 此时 AD 和 AE 重合, $\angle BAD+\angle EAF=180°$, ∴ 此时点 F 运动

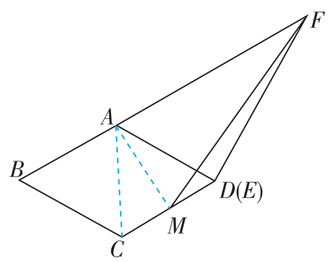
第一部分　考点过关
第二部分　题型突破
第三部分　中考新趋势
狂K重点

到 BA 延长线上的点 K 处，且 $AK=2AD=AH$，∴ 我们发现点 F 的运动轨迹是图(1)中的菱形 $AGHK$，连接 MK，很明显 MK 的长是 MF 长度的最大值.



图(1)

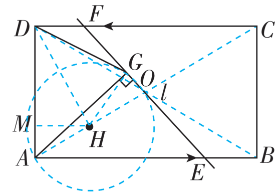
如图(2)，当点 E 运动到与点 D 重合时，MF 有最大值，连接 AC，AM.



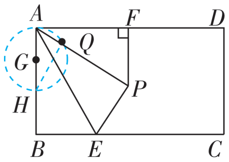
图(2)

∵ $\angle BAD=120°$，$\angle EAF=60°$，∴ $\angle BAD+\angle EAF=180°$，∴ 点 B，A，F 三点共线. ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ $AB=AD=BC=CD=2$，$\angle B=\angle ADC=60°$，∴ $\triangle ACD$ 是等边三角形. ∵ 点 M 是 CD 的中点，∴ $CM=MD=1$，$\angle DAM=30°$，∴ $AM=\sqrt{3}MD=\sqrt{3}$，$\angle MAF=90°$. ∵ $AF=2AD=4$，∴ $MF=\sqrt{AM^2+AF^2}=\sqrt{16+3}=\sqrt{19}$，故答案为 $\sqrt{19}$.

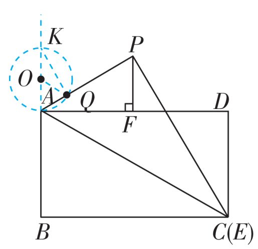
4. $2\sqrt{3}+2$ 【解析】如图，连接 AC，与 EF 相交于 O，取 AO 的中点 H，连接 GH. ∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $AB//CD$，$\angle ABC=90°$. ∵ $AB=4\sqrt{3}$，$BC=4$，∴ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，由勾股定理得 $AC=\sqrt{AB^2+BC^2}=8$. ∵ 动点 E，F 分别从点 A，C 同时出发，以每秒 1 个单位长度的速度沿 AB，CD 向终点 B，D 运动，∴ $CF=AE$. ∵ $AB//CD$，∴ $\angle ACD=\angle CAB$. 在 $\triangle COF$ 和 $\triangle AOE$ 中，$\begin{cases}\angle COF=\angle AOE,\\ \angle OCF=\angle OAE,\\ CF=AE,\end{cases}$ ∴ $\triangle COF\cong\triangle AOE$(AAS)，∴ $AO=CO=4$，$OF=OE$. 连接 BD，则 O 是对角线 AC，BD 的交点. ∵ $AG\perp EF$，∴ $GH=\frac{1}{2}AO$，∴ G 点在以 H 为圆心，AO 为直径的圆上运动. ∵ $AO=4$，∴ $AH=2$. ∵ $\tan\angle CAB=\frac{CB}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，∴ $\angle CAB=30°$，∴ $\angle DAC=60°$. 过点 H 作 $HM\perp AD$ 于 M 点，连接 DH，则点 G 运动到 DH 的延长线与⊙H 的交点处时 DG 最大. ∵ $AH=2$，∴ $AM=1$，$MH=\sqrt{3}$，∴ $DM=3$，∴ 易得 $DH=2\sqrt{3}$，∴ DG 的最大值为 $2\sqrt{3}+2$，故答案为 $2\sqrt{3}+2$.



5. $\frac{4\pi}{3}$ 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $\angle BAD=\angle B=90°$. ∵ 将 $\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折得到 $\triangle APE$，∴ $AP=AB=4$. 当点 P 在矩形内部时，作 $HQ\perp AP$，交 AB 于点 H，如图(1)，则 $\angle AQH=90°=\angle BAD$，∴ $\angle AHQ=\angle PAF=90°-\angle HAQ$. ∵ $PF\perp AD$，∴ $\angle PFA=90°=\angle AQH$，∴ $\triangle AQH\backsim\triangle PFA$，∴ $\frac{AH}{AP}=\frac{AQ}{PF}$. ∵ $AQ=\frac{1}{2}PF$，∴ $\frac{AH}{AP}=\frac{AQ}{PF}=\frac{1}{2}$，∴ $AH=\frac{1}{2}AP=2$. 取 AH 的中点 G，∴ 点 Q 在以 AH 为直径的⊙G 上运动，∴ 当点 E 从点 B 开始运动直至点 P 落在 AD 上时，点 Q 的运动轨迹为半圆 AH，∴ 点 Q 的运动路径长为 $\frac{1}{2}\times2\pi=\pi$. 当点 P 在矩形 $ABCD$ 的外部时，作 $KQ\perp AP$，交 BA 的延长线于点 K，如图(2)，同法可得 $\triangle AKQ\backsim\triangle PAF$，$AK=\frac{1}{2}AP=2$，$\angle AKQ=\angle PAF$. 取 AK 的中点 O，∴ 点 Q 在以 AK 为直径的⊙O 上运动，连接 OQ，当点 E 运动到点 C 时，∵ $AB=4$，$BC=4\sqrt{3}$，$\angle B=90°$，∴ $\tan\angle BAC=\frac{BC}{AB}=\sqrt{3}$，∴ $\angle BAC=60°$，∴ $\angle CAD=\angle BAD-\angle BAC=30°$. ∵ 将 $\triangle ABE$ 沿直线 AE 翻折得到 $\triangle APE$，∴ $\angle PAC=\angle BAC=60°$，∴ $\angle PAF=\angle PAC-\angle CAD=30°$，∴ $\angle AKQ=\angle PAF=30°$，∴ $\angle AOQ=2\angle AKQ=60°$，∴ 点 Q 的运动轨迹为圆心角为 $60°$ 的 $\overset{\frown}{AQ}$，∴ 点 Q 的运动路径长为 $\frac{60\pi}{180}\times1=\frac{\pi}{3}$. ∴ 点 Q 的运动路径总长为 $\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$，故答案为 $\frac{4\pi}{3}$.



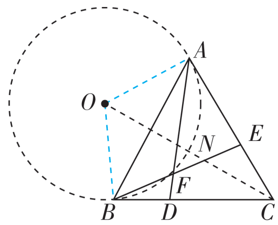
图(1)



图(2)

6. $2\sqrt{3}$ 【解析】∵ $\triangle ABC$ 是等边三角形，∴ $AB=BC=AC$，$\angle ABC=\angle BAC=\angle BCE=60°$. ∵ $BD=CE$，∴ $\triangle ABD\cong\triangle BCE$(SAS)，∴ $\angle BAD=\angle CBE$. 又 ∵ $\angle AFE=\angle BAD+\angle ABE$，∴ $\angle AFE=\angle CBE+\angle ABE=\angle ABC$，∴ $\angle AFE=60°$，∴ $\angle AFB=120°$，∴ 点 F 在以 O 为圆心，OA 长为半径的 $\overset{\frown}{AB}$

上运动，如图，连接 OC 交⊙O 于 N，当点 F 与 N 重合时，CF 的值最小. 易知 $\angle AOB=120°$，$\triangle OAC\cong\triangle OBC$，∴ $\angle ACO=\angle BCO$，$\angle AOC=\angle BOC$，∴ OC 垂直平分 AB，∴ 易得 $ON=OA=2\sqrt{3}$，$OC=4\sqrt{3}$，∴ CF 的最小值为 $OC-ON=4\sqrt{3}-2\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. 故答案为 $2\sqrt{3}$.

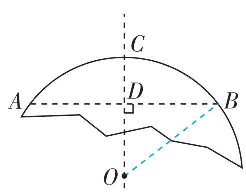


C 检测验收练

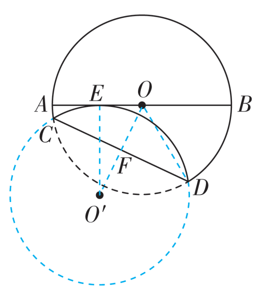
刷 速度

1. D 【解析】∵ $\angle E=35°$，∴ $\angle AOD=2\angle E=70°$，∴ $\angle BOD=180°-70°=110°$. 故选 D.

2. C 【解析】设圆心为 O，连接 OB，如图所示. ∵ CD 垂直平分 AB，$AB=40$ cm，∴ $BD=20$ cm. ∵ $OC=OB$，∴ $OD=OB-CD$. ∵ $\angle ODB=90°$，∴ $OD^2+BD^2=OB^2$，∴ $(OB-10)^2+20^2=OB^2$，解得 $OB=25$，即圆形工件的半径为 25 cm，故选 C.

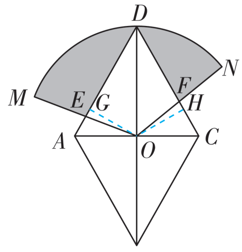


3. C 【解析】如图，设 $AE=x$，$CD=y$，设弧 CED 的圆心为 O'，连接 OO'交 CD 于 F，连接 $O'E$，OD. 由折叠得 $OO'\perp CD$，$OF=O'F$，⊙O' 的半径为 5，∴ $CF=DF=\frac{1}{2}CD=\frac{y}{2}$，∴ $OF=\sqrt{OD^2-DF^2}=\sqrt{25-\frac{y^2}{4}}$，∴ $OO'=2\sqrt{25-\frac{y^2}{4}}$.



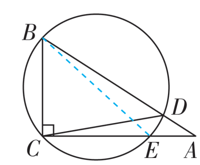
∵ 弧 CD 与 AB 相切于点 E，∴ $O'E\perp AB$，∴ $OO'^2=OE^2+O'E^2$. ∵ $OE=OA-AE=5-x$，∴ $\left(2\sqrt{25-\frac{y^2}{4}}\right)^2=(5-x)^2+5^2$，∴ $(x-5)^2+y^2=75$，当 $x=5$ 时，y 的值最大，最大值为 $5\sqrt{3}$，当 $x=10$ 时，y 的值最小，最小值为 $5\sqrt{2}$，∴ $5\sqrt{2}\leq CD\leq 5\sqrt{3}$. 故选 C.

4. B 【解析】如图，过点 O 分别作 AD，CD 的垂线，垂足分别是 G，H. ∵ $OG\perp AD$，$OH\perp CD$，∴ $\angle OGE=\angle OHF=90°$. ∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，BD 是对角线，$AC\perp BD$，∴ DB 平分 $\angle ADC$，∴ $OG=OH$. ∵ $AB\parallel CD$，

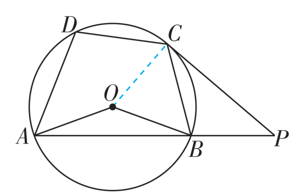


$\angle BAD=120°$，∴ $\angle ADC=180°-120°=60°$，∴ $\angle GOH=180°-\angle ADC=180°-60°=120°$. ∵ $\angle EOF=\angle EOG+\angle GOF=120°$，$\angle GOH=\angle GOF+\angle FOH=120°$，∴ $\angle EOG=\angle FOH$. 在 $\triangle OGE$ 与 $\triangle OHF$ 中，$\begin{cases}\angle OGE=\angle OHF,\\ OG=OH,\\ \angle EOG=\angle FOH,\end{cases}$ ∴ $\triangle OGE\cong\triangle OHF$(ASA)，∴ $S_{Rt\triangle OGE}=S_{Rt\triangle OHF}$，∴ $S_{四边形EOFD}=S_{四边形GOHD}$. ∵ $\angle ADC=60°$，∴ $\angle ADO=\frac{1}{2}\angle ADC=30°$. ∵ $AO=1$，∴ $OD=\frac{AO}{\tan\angle ADO}=\sqrt{3}$，∴ $OG=\frac{1}{2}OD=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$DG=OD\cdot\cos\angle ADO=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$，∴ $S_{Rt\triangle OGD}=\frac{1}{2}DG\cdot OG=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，同理，$S_{Rt\triangle OHD}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$，∴ $S_{四边形GOHD}=S_{Rt\triangle OGD}+S_{Rt\triangle OHD}=\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. ∵ $S_{扇形MON}=\frac{120}{360}\pi\times(\sqrt{3})^2=\pi$，∴ $S_{阴影}=S_{扇形MON}-S_{四边形EOFD}=S_{扇形MON}-S_{四边形GOHD}=\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 故选 B.

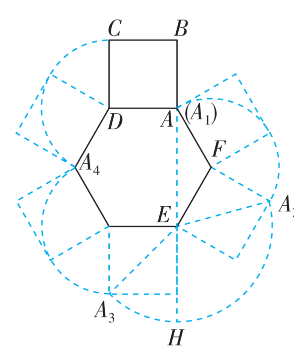
5. $13°$ 【解析】如图，连接 BE. 在 $Rt\triangle BCE$ 中，$CB=CE$，则 $\angle CEB=\angle CBE=45°$. ∵ $\angle CEB$ 是 $\triangle ABE$ 的外角，∴ $\angle ABE=\angle CEB-\angle A=45°-32°=13°$，∴ $\angle ACD=\angle ABE=13°$，故答案为 $13°$.



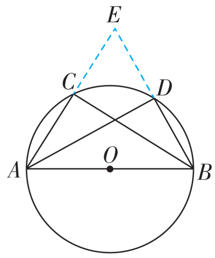
6. $105°$ 【解析】连接 OC，如图所示. ∵ PC 为切线，点 C 为切点，∴ $OC\perp PC$，∴ $\angle OCP=90°$. ∵ $\angle BCP=35°$，∴ $\angle OCB=90°-\angle BCP=55°$. ∵ $OC=OB$，∴ $\angle OBC=\angle OCB=55°$，∴ $\angle BOC=180°-\angle OCB-\angle OBC=70°$. ∵ $\angle AOB=140°$，∴ $\angle AOC=360°-\angle AOB-\angle BOC=150°$，∴ $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC=75°$，∴ $\angle ADC=180°-\angle ABC=105°$. 故答案为 $105°$.



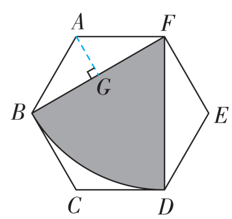
7. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ 【解析】边长为 1 的正方形 $ABCD$ 在正六边形外部做顺时针滚动，如图，点 A 的运动轨迹是图中弧线，连接 AE 并延长交弧线于 H，由图可得线段 AH 的长即为点 A 在滚动过程中到出发点的最大距离. 由勾股定理得 $EH=EA_2=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. 由题意得正六边形的内角为 $\frac{180°\times(6-2)}{6}=120°$，在 $\triangle AEF$ 中，$AF=EF=1$，$\angle AFE=120°$，∴ $\angle FAE=\angle AEF=30°$，$AE=2\times AF\times\cos 30°=\sqrt{3}$，∴ $AH=AE+EH=\sqrt{3}+\sqrt{2}$，∴ 点 A 在滚动过程中到出发点的最大距离为 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$. 故答案为 $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.



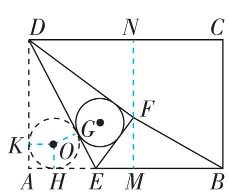
8. 8 【解析】延长 AC,BD 交于 E,如图所示. $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,$\therefore BD\perp AD$,$\therefore \angle ADB=\angle ADE=90°$. $\because AD$ 平分 $\angle BAC$,$\therefore \angle BAD=\angle DAE=\angle CBD$. $\because AD=AD$,$\therefore \triangle BAD\cong\triangle EAD(\mathrm{ASA})$,$\therefore BD=DE=2\sqrt{5}$,$\therefore BE=4\sqrt{5}$. $\because AB=10$,$BD=2\sqrt{5}$,$\therefore AD=4\sqrt{5}$. $\because \angle DAB=\angle CBD$,$\angle ADB=\angle BCE=90°$,$\therefore \triangle ABD\backsim\triangle BEC$,$\therefore \frac{BE}{AB}=\frac{BC}{AD}$,$\therefore \frac{4\sqrt{5}}{10}=\frac{BC}{4\sqrt{5}}$,$\therefore BC=8$. 故答案为 8.



9. $\sqrt{3}$ 【解析】$\because$ 六边形 $ABCDEF$ 是正六边形,$\therefore \angle BAF=\angle AFE=\angle E=\frac{(6-2)\times180°}{6}=120°$,$AB=AF=EF=DE=6$,$\therefore \angle AFB=\angle ABF=\frac{1}{2}(180°-120°)=30°$,$\angle EFD=\angle EDF=\frac{1}{2}(180°-120°)=30°$,$\therefore \angle BFD=120°-2\times30°=60°$. 如图,过点 A 作 $AG\perp BF$ 于点 G,则 $BF=2FG=2AF\cdot\cos30°=2\times6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$. 设圆锥的底面半径为 r,则 $2\pi r=\frac{60\pi}{180}\times6\sqrt{3}$,$\therefore r=\sqrt{3}$. 故答案为$\sqrt{3}$.



10. $\frac{7\sqrt{65}}{65}$ 【解析】如图,设 $\triangle ADE$ 内切圆圆心为 O,连接 OG,过 O 作 $OH\perp AB$ 于点 H,过 O 作 $OK\perp AD$ 于点 K,则四边形 $OKAH$ 为正方形,根据切线长定理可得 $DK=DG=\sqrt{5}+1$,$EH=EG=\sqrt{5}-1$. 设 $\odot O$ 的半径为 r,则 $OK=OG=OH=r$,$\therefore AK=AH=r$,$\therefore AD=DK+AK=\sqrt{5}+1+r$,$AE=\sqrt{5}-1+r$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle ADE$ 中,$DE=DG+EG=2\sqrt{5}$,$AD^2+AE^2=DE^2$,即 $(\sqrt{5}+1+r)^2+(\sqrt{5}-1+r)^2=(2\sqrt{5})^2$,解得 $r=3-\sqrt{5}$ 或 $r=-3-\sqrt{5}$(舍去),$\therefore AD=4$,$AE=2$,$\therefore AB=3AE=6$. 由折叠知,$DF=AD=4$,$EF=EA=2$,$\angle EFD=90°$. 过 F 作 $MN\perp AB$ 于点 M,交 CD 于点 N,则 $\angle EMF=\angle DNF=90°$. $\because \angle DFN=\angle FEM=90°-\angle EFM$,$\therefore \triangle EFM\backsim\triangle FDN$,$\therefore \frac{EM}{FN}=\frac{FM}{DN}=\frac{EF}{DF}=\frac{1}{2}$,$\therefore FN=2EM$,$DN=2FM$. 设 $EM=x$,则 $FN=2x$,$\therefore FM=4-2x$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EFM$ 中,$EM^2+FM^2=EF^2$,即 $x^2+(4-2x)^2=2^2$,解得 $x=\frac{6}{5}$ 或 $x=2$(舍去),$\therefore EM=\frac{6}{5}$,$FM=4-2x=\frac{8}{5}$,$BM=AB-AE-EM=\frac{14}{5}$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle BFM$ 中,$BF=\sqrt{BM^2+FM^2}=\frac{2\sqrt{65}}{5}$,$\therefore \cos\angle ABF=\frac{BM}{BF}=\frac{7\sqrt{65}}{65}$. 故答案为$\frac{7\sqrt{65}}{65}$.



11.【解】(1)如图,连接 OD.

在 $\odot O$ 中,$OC=OD$,$\angle OCP=60°$,

$\therefore \triangle OCD$ 是等边三角形,$\therefore \angle COD=60°$.

$\because OC=2$,$\therefore \overset{\frown}{CD}$ 的长为$\frac{60\pi\times2}{180}=\frac{2\pi}{3}$.

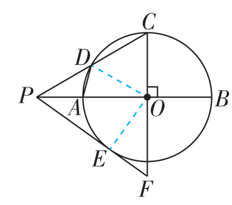
(2)$\because OC\perp AB$,$\therefore \angle POF=\angle AOC=90°$,

$\therefore \angle AOD=\angle AOC-\angle COD=30°$.

$\because OA=OD$,

$\therefore \angle DAO=\angle ADO=\frac{180°-\angle AOD}{2}=75°$,即 $\angle DAB=75°$.

(3)如图,连接 OE.



$\because \angle AOC=90°$,$\angle OCP=60°$,

$\therefore PO=\sqrt{3}CO=2\sqrt{3}$.

由题可知,PF 是 $\odot O$ 的切线,

$\therefore \angle OEF=90°$,

$\therefore \angle OFP+\angle FOE=90°$.

$\because \angle POE+\angle FOE=90°$,

$\therefore \angle OFP=\angle POE$,

$\therefore \cos\angle OFP=\cos\angle POE=\frac{OE}{PO}=\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

刷有所得

连半径是解决圆相关问题的重要方法,可利用半径相等构造等腰三角形;结合垂径定理,用半径、弦心距、半弦长构造直角三角形;切线问题中,半径与切线垂直构造直角.

12.【解】(1)$\because AB$ 为 $\odot O$ 的弦,$\therefore OA=OB$,$\therefore \angle A=\angle ABO$.

$\because \triangle AOB$ 中,$\angle A+\angle ABO+\angle AOB=180°$,$\angle ABO=30°$,

$\therefore \angle AOB=180°-2\angle ABO=120°$.

$\because$ 直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 C,CE 为 $\odot O$ 的直径,

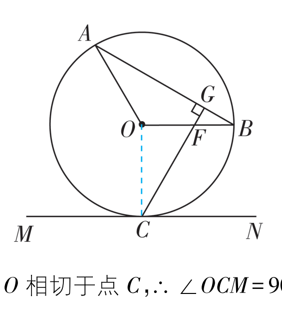
$\therefore CE\perp MN$,即 $\angle ECM=90°$.

又$\because AB/\!/MN$,$\therefore \angle CDB=\angle ECM=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle ODB$ 中,$\angle BOE=90°-\angle ABO=60°$,

$\therefore \angle BCE=\frac{1}{2}\angle BOE=30°$.

(2)如图,连接 OC.



$\because$ 直线 MN 与 $\odot O$ 相切于点 C,$\therefore \angle OCM=90°$.

$\because OB /\!/ MN$，$\therefore \angle OCM=\angle COB=90°$.

$\because CG\perp AB$，$\therefore \angle FGB=90°$，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle FGB$ 中，由 $\angle ABO=30°$，得 $\angle BFG=90°-\angle ABO=60°$，$\therefore \angle CFO=\angle BFG=60°$.

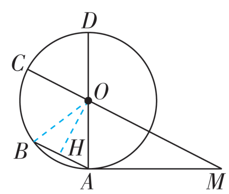
在 $Rt\triangle COF$ 中，$\tan\angle CFO=\dfrac{OC}{OF}$，$OC=OA=3$，

$\therefore OF=\dfrac{OC}{\tan\angle CFO}=\dfrac{3}{\tan 60°}=\sqrt{3}$.

13. (1)【证明】连接 OB，如图.

$\because$ 点 C 为弧 BD 的中点，$\therefore \angle BOC=\angle COD$.

$\because \angle OAB=\dfrac{1}{2}\angle BOD$，$\therefore \angle COD=\angle OAB$，$\therefore AB /\!/ CM$.



(2)【解】过点 O 作 $OH\perp AB$ 于点 H，如图.

$\because OA=OB$，$\therefore BH=AH=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\times 20=10(m)$. $\because AM$ 是切线，$\therefore OA\perp AM$，$\therefore \angle OAM=90°$. $\because AB /\!/ CM$，$\therefore \angle OAH=\angle AOM$，$\therefore \tan\angle OAH=\tan\angle AOM=\dfrac{AM}{AO}=2$，$\therefore \dfrac{OH}{AH}=2$，$\therefore OH=20$ m，$\therefore OA=\sqrt{AH^2+OH^2}=\sqrt{10^2+20^2}=10\sqrt{5}(m)$，

$\therefore AM=2OA=20\sqrt{5}$ m，

$\therefore OM=\sqrt{OA^2+AM^2}=\sqrt{(10\sqrt{5})^2+(20\sqrt{5})^2}=50(m)$，

$\therefore CM=OC+OM=(10\sqrt{5}+50)$ m.

14. (1)【证明】如图(1)，连接 OE，过点 O 作 $OG\perp AB$ 于点 G.

$\because \odot O$ 与 AD 相切于点 E，$\therefore OE\perp AD$.

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，AC 是正方形的对角线，

$\therefore \angle BAC=\angle DAC=45°$.

$\because AO=AO$，$\therefore \triangle AGO\cong\triangle AEO$，

$\therefore OE=OG$.

$\because OE$ 为 $\odot O$ 的半径，$\therefore OG$ 为 $\odot O$ 的半径.

$\because OG\perp AB$，$\therefore AB$ 与 $\odot O$ 相切.

【解】(2) 如图(1)，易得四边形 $AEOG$ 是正方形.

设 $AE=OE=OC=OF=R$.

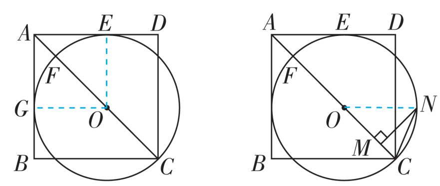
在 $Rt\triangle AEO$ 中，$\because AE^2+EO^2=AO^2$，$\therefore AO=\sqrt{2}R$.

$\because$ 正方形 $ABCD$ 的边长为 $\sqrt{2}+1$，

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ADC$ 中，$AC=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$.

$\because OA+OC=AC$，$\therefore \sqrt{2}R+R=\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)$，

$\therefore R=\sqrt{2}$，$\therefore \odot O$ 的半径为 $\sqrt{2}$.



图(1)　　图(2)

(3) 如图(2)，连接 ON，设 $CM=k$.

$\because CM:FM=1:4$，$\therefore CF=5k$，$\therefore OC=ON=2.5k$，

$\therefore OM=OC-CM=1.5k$.

在 $Rt\triangle OMN$ 中，由勾股定理得 $MN=2k$.

在 $Rt\triangle CMN$ 中，由勾股定理得 $CN=\sqrt{5}k$.

又由(2)得 $FC=5k=2\sqrt{2}$，$\therefore k=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$，$\therefore CN=\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$.

第七章 图形变换

A 2025 真题诊断练

刷 诊断

1. C 【解析】从左边看有两层，底层是两个正方形，上层的左边有一个正方形. 故选 C.

2. B 【解析】

选项	解析	选项正误
A	是轴对称图形，但不是中心对称图形	×
B	是轴对称图形，也是中心对称图形	√
C	是轴对称图形，但不是中心对称图形	×
D	是轴对称图形，但不是中心对称图形	×

刷有所得

轴对称图形的特征是一个图形沿一条直线折叠，直线两旁的部分能完全重合；

中心对称图形的特征是一个图形绕某一点旋转 180° 后，能与原图形完全重合.

3. C 【解析】由正方体表面展开图的第一行可知"中"与"梦"相对，由第二行可知"我"与"梦"相对，故剩下的两个字"的"与"国"相对，故选 C.

关键点拨

正方体表面展开图中，一线不过四，相间必相对，相连必相邻，田凹要弃之.

4. D 【解析】由作图过程可知，$\angle CBN=\angle BAC$. $\because CD$ 是 $\triangle ABC$